

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA RAČUNALNIŠTVO IN INFORMATIKO
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matej Drame

Fizikalno osnovano senčenje

DIPLOMSKO DELO
NA INTERDISCIPLINARNEM UNIVERZITETNEM ŠTUDIJU

MENTOR: doc. dr. Matija Marolt

Ljubljana, 2014

Rezultati diplomskega dela so intelektualna lastnina avtorja in Fakultete za računalništvo in informatiko Univerze v Ljubljani. Za objavljane ali izkoriščanje rezultatov diplomskega dela je potrebno pisno soglasje avtorja, Fakultete za računalništvo in informatiko ter mentorja.

Besedilo je oblikovano z urejevalnikom besedil \LaTeX .

Fakulteta za računalništvo in informatiko izdaja naslednjo nalogo:

Fizikalno osnovano senčenje

Tematika naloge:

V diplomski preglejte najpomembnejše fizikalno osnovane senčilne modele in obrazložite v čem se razlikujejo od drugih modelov. Predstavite fizikalno ozadje, ki je pomembno za izpeljavo modelov, s poudarkom na mikropovršinskih modelih. Razložite njihove sestavne komponente ter primerjajte izbire posameznih komponent. Izbrane modele implementirajte s tehnikami vzorčenja po pomembnosti.

IZJAVA O AVTORSTVU DIPLOMSKEGA DELA

Spodaj podpisani Matej Drame, z vpisno številko **63080078**, sem avtor diplomskega dela z naslovom:

Fizikalno osnovano senčenje

S svojim podpisom zagotavljam, da:

- sem diplomsko delo izdelal samostojno pod mentorstvom doc. dr. Matije Marolta,
- so elektronska oblika diplomskega dela, naslov (slov., angl.), povzetek (slov., angl.) ter ključne besede (slov., angl.) identični s tiskano obliko diplomskega dela
- soglašam z javno objavo elektronske oblike diplomskega dela v zbirki "Dela FRI".

V Ljubljani, dne 14. maja 2014

Podpis avtorja:

Kazalo

Povzetek

Abstract

1	Uvod	1
1.1	Matematična notacija	3
2	Fizikalno ozadje	5
2.1	Radiometrija	5
2.1.1	Geometrijska optika, predpostavke	6
2.1.2	Radiometrične količine	7
2.2	Optično gladke površine	11
2.3	Interakcija med svetlobo in snovjo	14
2.4	Teorija mikropovršin	17
3	BRDF	21
3.1	Definicija	21
3.2	Sorodniki	23
3.3	Fizikalne omejitve	24
3.4	Lambert	25
3.5	Vizualizacija	26
3.6	Rusinkiewicz parametrizacija	27
3.7	Phong in Blinn-Phong	28
3.8	Izmerjeni BRDF	30

4	Fizikalno osnovani BRDF	35
4.1	Torrance-Sparrow, Blinn, Cook-Torrance	35
4.2	Oren-Nayar	39
4.3	Shirley, Schlick, Ashikhmin-Shirley	42
4.4	Walter, Weidlich, Wilkie	44
4.5	Normaliziran Blinn-Phong	45
4.6	Splošni mikropovršinski BRDF	48
4.6.1	Komponenta D	51
4.6.2	Komponenta G	54
5	Implementacije	57
5.1	Svetila	57
5.1.1	Točkasta svetila	58
5.2	Tehnike IBL	59
5.2.1	Filtrirane mape okolja	59
5.2.2	Vzorčenje po pomembnosti	60
5.2.3	Primeri vzorčenja po pomembnosti	61
5.2.4	Vzorčenje mikropovršinskih BRDF	63
5.2.5	Filtrirano vzorčenje po pomembnosti	65
6	Zaključek	69
	Literatura	71
A	Prostorski kot	77
B	Monte Carlo aproksimacija	79

Povzetek

Fizikalno osnovano senčenje je trend na področju ustvarjanja tako filmov kot iger. Ustvarjalcem vsebin omogoča enostavnejšo izdelavo realističnih materialov, brez zamudnih popravkov za različne osvetlitve. Prednosti izvirajo iz boljše simulacije fizikalnih zakonitosti.

V diplomski nalogi pregledamo najpomembnejše fizikalno osnovane senčilne modele in razložimo, v čem se razlikujejo od prejšnjih modelov. Prvi del naloge je namenjen obravnavi interakcije med svetlobo in površinami. Razumevanje fizikalnega ozadja je pomembno za matematične modele senčenja, ki jih nato podrobno izpeljemo. Specifično se posvetimo mikropovršinskim modelom. Razložimo njihove sestavne komponente ter primerjamo izbire komponent.

V drugem delu naloge izbrane modele implementiramo s tehnikami vzorčenja po pomembnosti, ki se uporabljajo predvsem v filmski industriji. Posebej se posvetimo kombinaciji tehnik vzorčenja z mikropovršinskimi modeli. Poleg tega govorimo o interaktivni različici teh tehnik.

Ključne besede: senčenje, geometrijska optika, BRDF, upodabljanje, realizem, mikropovršinski modeli, vzorčenje po pomembnosti

Abstract

Physically-based shading is a trend in both film and game production. Content creators can easily create realistic materials, without time-consuming tweaking for different illumination. Advantages stem from better simulation of the underlying physics.

We take a look at the most important physically-based shading models. We discuss what makes them different from older models. The first part of the thesis describes the interaction between light and surfaces. This physics background is important to understand, since we use it to explain the derivation of the math behind shading models. Specific focus is placed on microfacet models and their building blocks. We compare various choices for these blocks.

The second part of the thesis describes implementations based on importance sampling techniques, which are used extensively in film production. Importance sampling of microfacet models is also included. We conclude with an interactive version of these techniques.

Keywords: shading, geometric optics, BRDF, rendering, realism, microfacet models, importance sampling

Poglavje 1

Uvod

Eden najpomembnejših delov procesa upodabljanja grafičnih objektov je senčenje (angl. *shading*). Ta del je zadolžen za izračun barve dane točke na površini objekta. Pogosto v senčenju upoštevamo osvetlitev in lastnosti površine, še posebej, kadar je naš cilj fotorealizem.

V računalniški grafiki uporabljamo različne metode za opis in upodobitev objektov, odvisno od njihove navidezne velikosti. Na makro ravni (recimo stavba, predmeti, osebe) površine objektov modeliramo z geometrijo, pogosto trikotniškimi mrežami. Na mezo ravni (stena stavbe, površina predmetov) površinske variacije opišemo s teksturami. Površinske variacije vključujejo relief in druge lastnosti. Mikro raven je domena velikosti, manjših od slikovnih elementov. Tukaj imajo glavno vlogo senčilni modeli. Seveda ločitev na različne ravni ni nespremenljiva. S povečanjem razdalje med virtualno kamero in objektom lahko površinske strukture, ki so prej prekrivale več slikovnih elementov, preidejo na mikro raven.

S senčilnim modelom specificiramo interakcijo med svetlobo in površinami (razen v primeru nefotorealističnega upodabljanja, ki ga v tem tekstu ne obravnavamo). Senčenje najdemo tudi pod imenom lokalno osvetljevanje, ker nas ne zanimajo odboji svetlobe med večimi površinami (globalno osvetljevanje). Senčilni modeli tako obravnavajo razpršitev, prenos in absorpcijo na površino vpadne svetlobe. Vključujejo odvisnosti teh pojavov od lastnosti

svetlobe, materiala ter površine same.

Natančno simulacijo fizikalnih zakonitosti v okviru upodabljanja potrebujemo le redkokdaj. Lambertov model razpršenega odboja, Blinn-Phongov model, Wardov anizotropni model in model Lafortune so primeri enostavnih *empiričnih* pristopov. Zaradi svoje računske učinkovitosti so vsplošno uporabljani, kljub temu, da niso fizikalno smiselni. Napake teh modelov so pogosto povsem sprejemljive (človeški vidni sistem je prilagodljiv).

Drugo veliko skupino senčilnih modelov lahko opredelimo kot osnovano na podatkih. Interakcijo med svetlobo in površinami lahko izmerimo z različnimi napravami, razvitimi posebej za ta namen. Meritve lahko uporabimo za nastavitev parametrov matematičnih modelov, kar nam omogoča zaobiti razumevanje zapletenih fizikalnih procesov. Teoretično lahko na takšen način pridobimo optimalen senčilni model, vendar se izkaže, da je pristop nepraktičen. Pogosto potrebujemo veliko število parametrov (tudi več 100, v primerjavi s 3 ali 4 parametri empiričnih modelov) za željeno natančnost. Poleg tega ti modeli niso fleksibilni - bolj ali manj smo omejeni na izmerjene podatke.

Tretja skupina modelov je osnovana na fizikalnih principih. Za razliko od empiričnih modelov, ki so zasnovani tako, da posnemajo vizualno najpomembnejše značilnosti površin s čim manj računskimi viri, so ti modeli izpeljani iz skrbno izbranih fizikalno upravičenih predpostavk. Še vedno govorimo o aproksimacijah, vendar so te bolj ustrezne. Fizikalno osnovani senčilni modeli so vse bolj pomembni tako v filmski kot v interaktivni industriji. Z njimi je mogoče enostavneje ustvariti realistične materiale, ki se dobro obnašajo pod različnimi osvetlitvami, medtem ko empirični pristopi pogosto zahtevajo zamudne popravke za različne scene ali tipe osvetlitev. Tako je najpomembnejša prednost takšnega senčenja izboljšana produktivnost pri ustvarjanju vsebin.

Fizikalno osnovano senčenje se od preteklih modelov razlikuje predvsem v bolj podrobnem upoštevanju obnašanja svetlobe. Vsesplošno prisotne računske zmogljivosti so dovolj napredovale, da lahko prenehamo uporabljati stare aproksimacije. Skupaj z aproksimacijami lahko opustimo tudi stare načine

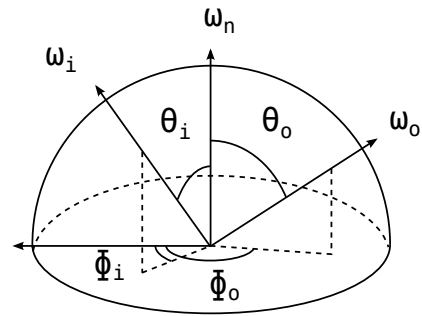
ustvarjanja vsebine.

Fizikalni principi in matematika v ozadju teh modelov so bolj ali manj skriti pred ustvarjalci. Vsekakor pa je poznavanje ozadja pomembno za razvijalce grafičnih pogonov in orodij za izdelavo vsebin.

1.1 Matematična notacija

V nalogi konsistentno uporabljamo matematično notacijo iz tabele 1.1. Vsi vektorji, ki se pojavijo v enačbah, so enotski. Pogosto bomo uporabljali zvezo $(\omega_i \cdot \omega_n) = \cos \theta_i$, kjer je θ_i kot med vektorjema ω_i in ω_n . Vseskozi nalogo se bomo srečevali z geometrijsko konfiguracijo na sliki 1.1. Kot ϕ_i (ϕ_o) je kot med neko izbrano tangento na površino in projekcijo ω_i (ω_o) na ravnino površine.

Notacija	Opis
ω_n	normala na površino
ω_i	vektor proti viru svetlobe
ω_o	vektor proti opazovalcu
ω_h	kompromisni vektor
θ_i, ϕ_i	sferična kota, ki ustrežata ω_i
θ_o, ϕ_o	sferična kota, ki ustrežata ω_o
$(\omega_i \cdot \omega_o)$	skalarni produkt
$\langle \omega_i \cdot \omega_o \rangle$	$\max((\omega_i \cdot \omega_o), 0)$
$ \omega_i \cdot \omega_o $	$\text{abs}((\omega_i \cdot \omega_o))$
$\ \omega\ $	dolžina vektorja
$\Omega(\omega_n)$	hemisfera: $\{\omega \mid (\omega \cdot \omega_n) > 0\}$
D	porazdelitev mikronormal
G	geometrijski faktor
F	Fresnelov faktor
L_i, L_o	vpadna in odhodna radianca
$f(\omega_i, \omega_o)$	BRDF



Slika 1.1: Matematična notacija in geometrijska konfiguracija.

Poglavje 2

Fizikalno ozadje

V tem poglavju govorimo o naravi svetlobi, formaliziramo količine, s katerimi jo bomo obravnavali, poudarimo predpostavke, ki bodo to obravnavo poenostavile in se posvetimo fizikalnemu procesu, ki nas bo najbolj zanimal - interakciji med svetlobo in snovjo.

2.1 Radiometrija

Radiometrija (angl. *radiometry*) je znanost merjenja elektromagnetnega sevanja, to je toka osnovnih delcev fotonov. Fotoni imajo lastnosti tako delcev kot valov (kvantnomehanski koncept dualnosti delec/val), vendar je v okviru računalniške grafike običajno dovolj, če si jih predstavljamo kot delce in upoštevamo njihovo valovno dolžino. Modeliranje elektromagnetnega sevanja kot toka delcev pomeni, da zanemarimo nekatere valovne fizikalne pojave kot sta interferenca in polarizacija, ter kvantnomehanske pojave kot sta fluorescenca in fosforescenca.

Fotoni so nosilci *sevalne energije*, sorazmerno s frekvenco in obratno sorazmerno z valovno dolžino. Glede na vrednosti teh treh količin razdelimo elektromagnetno sevanje na radijske valove, mikrovalove, infrardeče valovanje, vidno svetlobo, ultravijolično valovanje, rentgenske žarke in žarke gama. Spektralne kategorije v prejšnjem stavku so navedene urejeno po padajoči va-

lovni dolžini oziroma naraščajoči frekvenci ter energiji. Tako posamezen foton infrardeče svetlobe nosi manj energije kot posamezen foton vidne svetlobe, energični gama žarek pa približno toliko kot milijon fotonov vidne svetlobe. Človeško oko zaznava samo fotone z valovnimi dolžinami med približno 380 in 780 nanometri, zato nas za problem računalniško generiranih slik zanima le ta razpon. V nadaljevanju naloge uporabljamo termina elektromagnetno sevanje in svetloba sinonimno.

2.1.1 Geometrijska optika, predpostavke

Radiometrija je predvsem geometrijska obravnava svetlobe. Uporabljamo abstrakcijo geometrijske optike, kjer so makroskopske lastnosti svetlobe dovolj, da opišemo interakcijo med svetlobo in objekti, večjimi od valovne dolžine svetlobe. V abstrakciji predpostavimo:

Linearnost. Količine svetlobe lahko seštevamo. Zanemarimo na primer konstruktivno/destruktivno interferenco, ki je kriva za pojav iridescence na milnih mehurčkih.

Ohranjanje energije. Odboj svetlobe s površine ne more dodati energije, energijo lahko samo izgubimo (v resnici se samo spremeni v drugo obliko). Predpostavka ni očitna, odboj nekaterih drugih osnovnih delcev lahko nosi energijo, večjo od vpadne (primer so nevtroni [38]).

Naključna polariziranost. Predpostavimo, da je svetloba naključno polarizirana, kar pomeni, da nam je ni potrebno upoštevati v izračunih. Edina pomembna lastnost svetlobe bo valovna dolžina (in smer).

Neodvisnost valovnih dolžin. Obnašanje svetlobe pri neki valovni dolžini je neodvisno od obnašanja pri drugih valovnih dolžinah. Zanemarimo pojave, kot sta fluorescenca in fosforescenca, kjer površine vpadno svetlobno energijo izsevajo pri drugih valovnih dolžinah.

Stabilno stanje. Porazdelitev svetlobe se ne spreminja s časom. Zanemarimo dejstvo, da ima svetloba končno hitrost in se torej njena porazde-

litev po površinah in prostoru spreminja, dokler ne doseže ekvilibrija (kar se zgodi zelo hitro).

Pod temi predpostavkami lahko o svetlobi začnemo razmišljati kot o toku delcev. Vsak foton ima pripadajočo valovno dolžino in smer ter potuje v ravni liniji, dokler ne zadane snovi. Med seboj ne interaktirajo. Merjenje svetlobe se poenostavi na geometrijsko štetje fotonov oziroma njihovih energij, kot bomo videli v naslednjem poglavju.

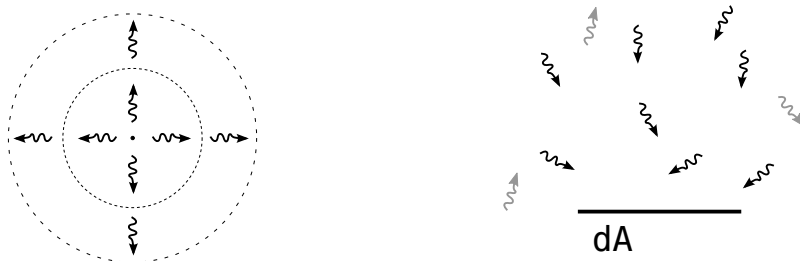
2.1.2 Radiometrične količine

Kljub temu, da je foton diskretna enota svetlobe, pa v radiometriji uporabljamo zvezne količine. Težko je namreč govoriti o številu fotonov, ki osvetlujejo površino v nekem trenutku, ker je to število skoraj vedno enako 0. Namesto tega obravnavamo povprečno število fotonov v kratkih časovnih intervalih (diferencialno majhnih) in majhnih območjih površine ali prostora. Govorimo torej o gostoti fotonov.

Potrebovali bomo samo 3 ali 4 radiometrične količine. Vse te količine so v splošnem odvisne od valovne dolžine, vendar bomo zaradi preglednosti odvisnost v definicijah izpustili.

Sevalna energija (angl. *radiant energy*) je osnovna radiometrična količina z enoto joule (kot vse oblike energije). Sevalni tok (angl. *radiant flux*) je sevalna energija, ki jo vir svetlobe izseva na enoto časa ali pa jo neka površina prejme. Teoretično bi ga lahko izmerili tako, da bi sešteli energije vseh oddanih/prejetih fotonov v enoti časa. Uporabljamo oznako Φ in enoto watt (W). Vire svetlobe (žarnica) običajno karakteriziramo z svetlobnim tokom.

Recimo, da zelo majhen vir svetlobe oddaja v prostor svetlobni tok Φ (skica 2.1). Če si ogledamo virtualne sfere okoli tega vira, je razvidno, da skozi potuje isti svetlobni tok (isti fotoni). Vendar se tok skozi vedno večje sfere *redči*. Z redčenjem mislimo na vedno manjše število fotonov na enoto površine sfer. Če ima neka sfera polmer r , potem je njena površina enaka



Slika 2.1: Levo: svetlobni tok majhnega vira svetlobe. Desno: obsevanost je svetlobni tok, ki ga površina prejme (vsota energij fotonov na enoto časa in na enoto površine).

$4\pi r^2$. Tok skozi to sfero ima gostoto

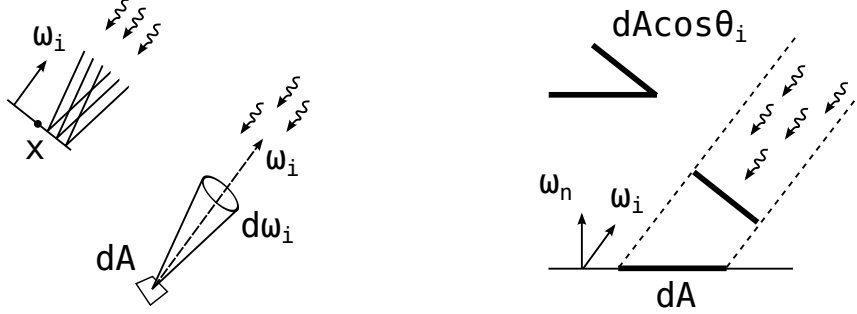
$$E = \frac{\Phi}{4\pi r^2} \quad (2.1)$$

Količina E je poimenovana obsevanost (angl. *irradiance*). Enota količine je W/m^2 .

Podobno lahko govorimo o obsevanosti poljubnih površin. Integral, ki opisuje povezavo med svetlobnim tokom in obsevanostjo, lahko zapišemo kot

$$\Phi = \int_A E(x) dA \quad (2.2)$$

kjer smo sešteli obsevanost diferencialno majhnih območij dA , ki sestavljajo površino (slika 2.1 desno, x je točka na dA). To je, sešteli smo energije vseh prejetih fotonov iz vseh smeri (v enoti časa). Intuitivno lahko razmišljamo o takšnem integralu podobno, kot če bi želeli izračunati maso objekta. Recimo, da imamo podano gostoto objekta, v zvezni obliki, za vsako točko v volumnu objekta. Potem je masa enaka integralu gostote čez celoten volumen. V našem primeru imamo namesto masne gostote gostoto svetlobnega toka. Pravzaprav imamo v radiometriji več gostot - obsevanost je samo *površinska* gostota svetlobnega toka.



Slika 2.2: Radianca - svetlobni tok znotraj prostorskega kota $d\omega_i$ okoli ω_i , zbran na območju dA (v ravnini pravokotni na ω_i), okoli x . Desno: površina ni pravokotna na smer ω_i .

Ekvivalentno, obsevanost lahko zapišemo v diferencialni obliki

$$E(x) = \frac{d\Phi}{dA} \quad (2.3)$$

Obsevanosti sorodna količina je izsevnost (angl. *radiant exitance*, označujemo jo z M) - to je gostota svetlobnega toka, ki ga površina *oddaja*. Pomembno je dejstvo, da v definiciji izsevnosti in obsevanosti ne govorimo o smeri fotonov v prostoru - merimo namreč fotone v vseh smereh.

Vendar bomo v naši obravnavi svetlobe potrebovali količino, ki nosi tudi informacijo o smeri fotonov. Optični senzorji (paličnice in čepnice v očeh, fotodiode v digitalnih fotoaparatih) namreč zaradi leč, zaslonke in drugih komponent merijo svetlobni tok samo v ozkem naboru smeri. Ti senzorji merijo radianco (angl. *radiance*), ki jo označujemo z L . Radianca bo za nas bistvenega pomena, saj v računalniški grafiki imitiramo optične senzorje. Namen senčenja je izračun ravno te kvantitete v smeri od virtualne kamere do točke na površini, ki jo izrisujemo.

Nabor smeri formaliziramo s konceptom prostorskega kota (kratka ponovitev je na voljo v dodatku).

Naj bo x neka točka (ne nujno na površini, lahko je v prostoru). O radianci $L(x, \omega)$ lahko razmišljamo kot o meri svetlobnega toka skozi x v

smeri ω . Zelo pomembna lastnost radiance je ohranitev vzdolž ravnih linij (angl. *conservation of radiance*). To je, če izmerimo radianco v točkah x_1 in x_2 , v smeri ω od ene do druge, bomo dobili isto vrednost: $L(x_1, \omega) = L(x_2, \omega)$. Predpostavljamo, da je med točkama prazen prostor. Ta lastnost nam omogoča, da si lahko radianco intuitivno predstavljamo kot mero *žarkov* svetlobe.

V nalogi bomo ločili med vpadno in odhodno radianco. Vpadna radianca $L_i(x, \omega)$ meri fotone, ki prihajajo v točko x iz smeri ω , medtem ko odhodna radianca $L_o(x, \omega)$ meri v smeri ω odhajajoče fotone. V praznem prostoru sta ti kvantiteti povezani z

$$L_i(x, \omega) = L_o(x, -\omega) \quad (2.4)$$

Na površinah ta povezava ne velja - tam je relacija med njima bistveno bolj zapletena, ker je odvisna od lastnosti površine. Razlikovanje med vpadno in odhodno radianco je razlog, da vektorji na ilustracijah vedno kažejo stran od površine, tudi če predstavljajo tok fotonov, ki na površino pada.

Formalno, radianca je definirana kot

$$L_i(x, \omega_i) = \frac{d\Phi}{dA \cos \theta_i d\omega_i} \quad (2.5)$$

kjer z $dA \cos \theta_i$ upoštevamo virtualno površino, pravokotno na smer ω_i (slika 2.2). Z drugimi besedami, da izmerimo radianco v točki x in smeri ω_i , preštejemo fotone na enoto časa, potujoče skozi majhen kos površine, pravokotne na smer ω_i , in z smermi znotraj majhnega prostorskega kota $d\omega_i$ okoli smeri ω_i .

V nadaljevanju bomo spuščali eksplicitno odvisnost od točke x in bomo pisali samo $L_i(\omega)$ ali $L_o(\omega)$. Radianca je tako povezana z obsevanostjo površinske točke z relacijo

$$E = \int_{\omega_i \in \Omega} L_i(\omega_i) \cos \theta_i d\omega_i \quad (2.6)$$

kjer seštejemo radianco po vseh smereh hemisfere nad površinsko točko. Enota radiance je $\text{W}/(\text{m}^2\text{sr})$, kjer je sr steradian.

Preglednica 2.1 povzema radiometrične količine, njihove oznake in enote.

Količina	angl.	Oznaka	Enota
sevalna energija	radiant energy	Q	J
sevalni tok	radiant flux	Φ	W
obsevanost	irradiance	E	W/m ²
izsevnost	radiant exitance	M	W/m ²
radianca	radiance	L	W/(m ² sr)

Tabela 2.1: Radiometrične količine

2.2 Optično gladke površine

Površine bomo definirali kot prehode med snovmi. *Optično gladke* površine so tiste, kjer so nepravilnosti na njej manjše od valovne dolžine svetlobe (v primeru vidne svetlobe nepravilnosti, manjše od $0.02\mu\text{m}$, nimajo vpliva [41]). Izkaže se, da je obnašanje svetlobe na gladkih površinah relativno enostavno opisati v našem modelu geometrijske optike.

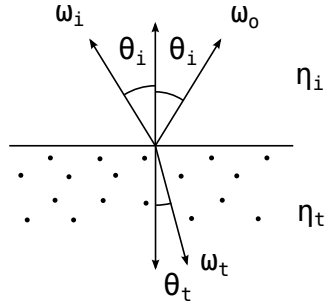
Na gladkih površinah se vsak enobarven žarek razdeli v največ dve smeri - v smer idealnega zrcalnega odboja (žarek ostane v isti snovi) in v idealno lomno smer (žarek se lomi v drugo snov). Situacija je prikazana na shemi 2.3. Vpadni žarek iz smeri ω_i se zrcali v smer ω_o , ki tvori isti kot z normalo na površino θ_i . ω_o je mogoče preprosto izračunati iz vektorjev ω_n in ω_i :

$$\omega_o = 2(\omega_i \cdot \omega_n)\omega_n - \omega_i \quad (2.7)$$

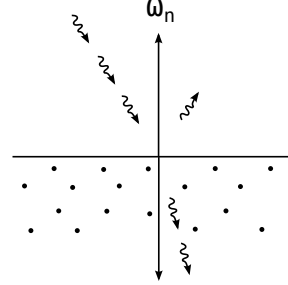
Smer lomljenega žarka ω_t podaja lomni zakon (imenovan tudi *Snellov zakon*) in je odvisna od lomnih količnikov η_i in η_t snovi na obeh straneh površine. V nalogi nas lomljen žarek ne bo zanimal. Poudarimo, da vsi vektorji ω_n , ω_i , ω_o in ω_t ležijo v isti ravnini.

Lomni količnik je razmerje med hitrostjo svetlobe v praznem prostoru in hitrostjo v snovi $\eta = c/v$. V tabeli 2.2 so podani lomni količniki za izbrane snovi, vrednosti so povprečja za valovne dolžine v vidnem spektru (lomni količnik variira z valovno dolžino svetlobe).

Fresnelove enačbe opisujejo *delež* svetlobe, ki se odbije od površine, in



Slika 2.3: Snellov zakon



Slika 2.4: Verjetnost odboja/loma določa Fresnel.

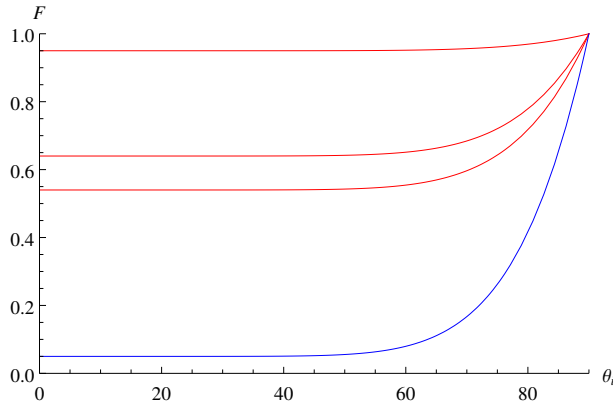
Snov	Lomni količnik
vakuum	1.0
zrak nad morjem	1.00029
led	1.31
voda (20 stopinj)	1.333
steklo	1.5–1.6
diamant	2.42

Tabela 2.2: Povprečni lomni količnik za nekatere snovi. Vir [29].

delež, ki potuje v drug medij. V splošnem so te enačbe nekoliko zapletene, vendar bodo zaradi naših predpostavk dovolj enostavnejše aproksimacije.

Fresnelova odbojnost, to je delež odbite svetlobe, je odvisna od vpadnega kota θ_i in lomnih količnikov. Če fiksiramo obe snovi, potem lahko govorimo o funkciji odbojnosti $F(\theta_i)$ za ti specifični snovi. Graf 2.5 prikazuje $F(\theta_i)$ v primeru bakra in v primeru plastike (govorimo o prehodu zrak/baker in zrak/plastika).

Fresnelova odbojnost $F_0 = F(0)$, torej kadar je $\omega_i = \omega_n$ (žarek pravokoten na površino), ima značilne vrednosti za kovine in za izolatorje. Izolatorji imajo tipično zelo nizke vrednosti F_0 , približno 0.05 in manj. Za prevodnike



Slika 2.5: Fresnelova odbojnost pod različnimi vpadnimi koti θ_i . Modra: plastika ($F_0 = 0.05$ čez vse valovne dolžine vidne svetlobe). Rdeča: baker, F_0 opišemo z RGB (krivulje od zgoraj navzdol) vrednostmi 0.95, 0.64 in 0.54. Vir [1].

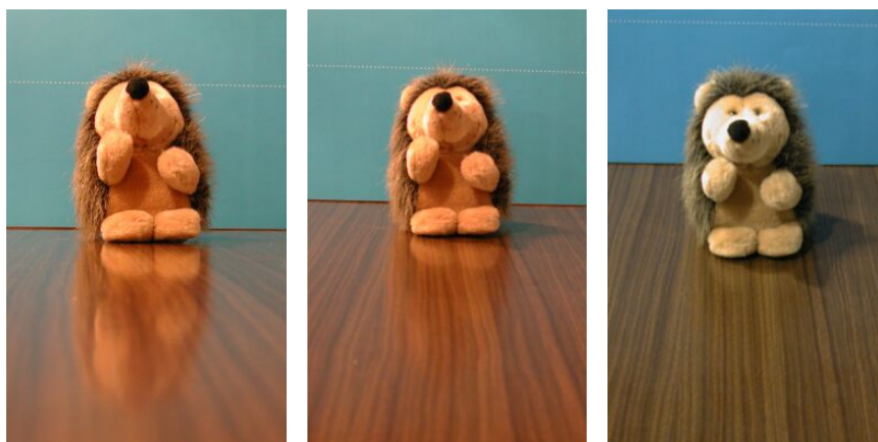
so te vrednosti veliko višje, tipično vsaj 0.5. Poleg tega F_0 prevodnikov močno variira z valovno dolžino, kar v praksi pomeni, da uporabljamo RGB.

Vrednosti $F(\theta_i)$ večinoma rastejo pri vseh snoveh in dosežejo maksimum 1 pri $\theta_i = 90^\circ$ (kar pomeni, da se odbije vsa svetloba). Rast odbojnosti z večanjem vpadnega kota imenujemo tudi Fresnelov efekt, predvsem v kontekstu izolatorjev, kjer je sprememba dramatična. Poleg tega je efekt pomemben tudi, kadar obravnavamo večslojne materiale (na primer lakiran les), kjer se delež odbite svetlobe z zgornjega sloja (lak) večja z večanjem vpadnega kota. Delež svetlobe, ki doseže spodnji sloj (les) materiala, se tako manjša, kar v preteklih senčilnih modelih pogosto ni bilo upoštevano. Serija slik 2.6 demonstrira, kako lakirana miza postane odbojnejša (podobna zrcalu) z večanjem vpadnega kota.

Široko uporabljano poenostavitev Fresnelovih enačb je uvedel Schlick [33]:

$$F(\theta_i) \approx F_0 + (1 - F_0)(1 - \cos \theta_i)^5 \quad (2.8)$$

Aproksimacija je dobra za večino materialov, razen za nekatere prevodnike, kot sta aluminij in železo, pri katerih ne uspe zajeti barvnih sprememb pri



Slika 2.6: Lakirana miza pod različnimi vpadnimi koti - na levi je kot najbolj položen, les pod lakom postaja manj viden. Vir [19].

položnih kotih [1]. Vrednosti F_0 so na voljo za številne materiale ali pa vrednost izračunamo iz lomnih količnikov. Če predpostavimo $\eta_i = 1$ (kar je dober približek za lomni količnik zraka), velja [1]:

$$F_0 = \frac{(\eta_t - 1)^2}{(\eta_t + 1)^2}$$

Ustvarjalcem vsebin so tipično ponujene referenčne tabele [22]. Na optično gladkih površinah je relacija med vpadno in odhodno radianco preprosto:

$$L_o(\omega_o) = F(\theta_i) L_i(\omega_i)$$

kadar je ω_o zrcaljen ω_i , sicer je odhodna radianca enaka 0.

2.3 Interakcija med svetlobo in snovjo

Interakcijo med svetlobo in snovjo lahko razdelimo na tri fizikalne pojave: absorpcijo, razprševanje (angl. *scattering*) in emisijo. Z emisijo, to je ustvarjanjem svetlobe iz drugih oblik energije, se v nalogi ne bomo ukvarjali.

Znotraj snovi absorpcija pretvarja svetlobo v druge oblike energije. Absorpcija samo zmanjša količino preostale svetlobe, ne spremeni pa njene

smeri. Lahko je odvisna od valovne dolžine svetlobe (nekatero valovne dolžine se bolje absorbirajo), kar daje snovi barvo.

Po drugi strani se svetloba razprši na optičnih spremembah - spremembah lomnega količnika. Razprševanje ne spremeni količine svetlobe, spremeni pa njeno smer. Poleg prehodov med snovmi tudi mikroskopski delci predstavljajo spremembe lomnega količnika.

Poudarimo pomembno razliko med kovinami in izolatorji: kovine absorbirajo vso svetlobo že na zelo kratkih razdaljah. Po drugi strani je pri izolatorjih absorpcija manjša. Poleg tega pri izolatorjih pogosto govorimo o mikroskopskih delcih znotraj medija, ki razpršijo svetlobo.

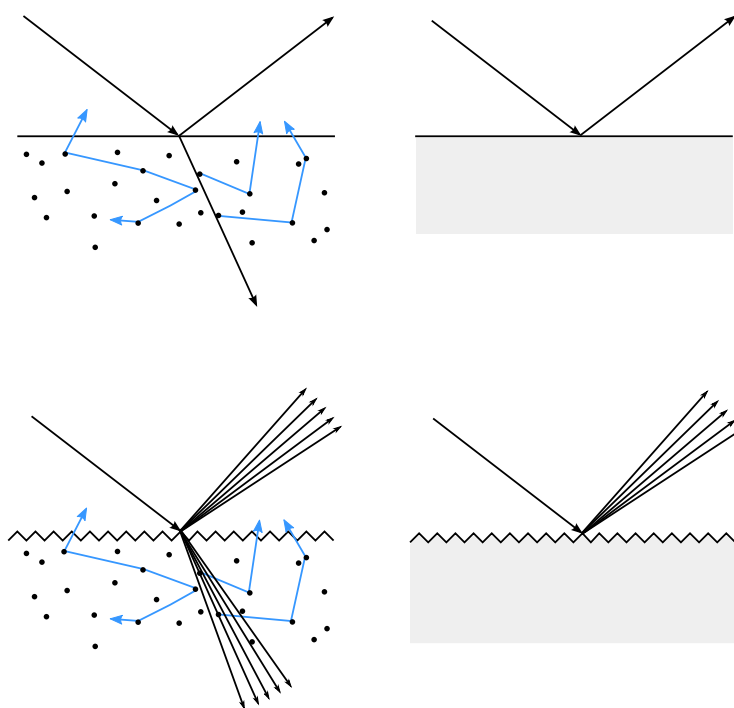
Oglejmo si sedaj razprševanje/absorpcijo v primerih, ki nas bodo najbolj zanimali. To so prehodi med snovmi, skupaj z relativno majhno količino območja pod površino. Na sliki 2.7 smo skicirali obnašanje svetlobe na gladkih/hrapavih površinah izolatorjev in kovin. Na gladkih površinah lahko uporabimo Fresnelove enačbe. Nekaj svetlobe se zrcali, preostala pa nadaljuje v lomljeni smeri. Če izolator vsebuje mikroskopske delce (je nehomogen), lahko ti razpršijo svetlobo dovolj, da se je nekaj vrne v prejšnji medij (seveda je lahko prej tudi selektivno absorbirana). Govorimo o *podpovršinskem* razprševanju.

Gladke kovinske površine so še enostavnejše - vsa lomljena svetloba je absorbirana.

Kot smo že omenili, imajo gladke površine nepravilnosti, manjše od valovne dolžine svetlobe. Pri hrapavih površinah so te nepravilnosti veliko večje od valovne dolžine svetlobe (vendar še vedno mikroskopsko majhne). Te površine si lahko predstavljamo kot sestavljene iz *lokalno* gladkih delov. Makroskopski rezultat hrapavosti je razpršen zrcalni odboj.

Podpovršinsko razpršeno svetlobo, ki se vrne nazaj (in izstopi v precej naključni smeri, neodvisno od vpadnega kota), imenujemo razpršeni odboj (angl. *diffuse reflection*, smiselno ime je tudi *body reflection*, za razliko od površinskega odboja *surface reflection*).

Na termin podpovršinsko razprševanje (angl. *sub-surface scattering*) na-



Slika 2.7: Absorpcija/razprševanje svetlobe. Levo: izolatorji, desno: kovine.
Zgoraj: optično gladke površine, spodaj: hrapave površine.

letimo pri obravnavi situacij, v katerih svetloba pod površino v materialu prepotuje relativno veliko razdaljo in posledično izstopi na površinski lokaciji, oddaljeni od vstopne. Vendar je to isti pojav kot razpršeni odboj, le razdalje so večje. Kadar je izstopna lokacija dovolj "blizu", privzamemo, da je svetloba izstopila v isti točki kot vpadni žarek. Takšna aproksimacija bistveno zmanjša računsko zahtevnost senčilnega modela.

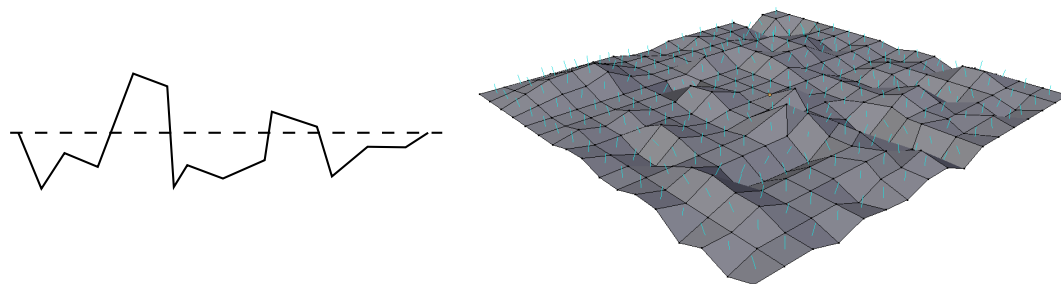
Na površinski odboj absorpcija v materialu ne vpliva. Po drugi strani je podpovršinsko razprševanje pod vplivom absorpcije. To pomeni, da ima podpovršinsko odbita svetloba značilno barvo materiala.

V večini primerov površinska hrapavost ne vpliva na podpovršinsko razprševanje. Razpršeni odboj se namreč razporedi čez nekoliko širše območje, kar zabriše površinske variacije. Vendar so pri nekaterih hrapavih materialih variacije velike v primerjavi s podpovršinskim razprševanjem (v smislu razdalj med vstopnimi in izstopnimi lokacijami). V teh primerih lahko opazimo retroodboj (angl. *retroreflection*) - vpadna svetloba se močneje odbije nazaj proti viru svetlobe, kar povzroči videz ploskosti. O retroodboju bomo še govorili kasneje.

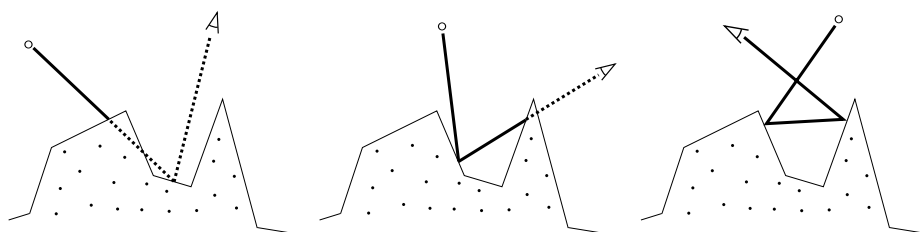
2.4 Teorija mikropovršin

V fizikalno osnovanih senčilnih modelih *mikrogeometrijo* površin tipično modeliramo kot zbirko velikega števila majhnih mikropovršinskih elementov (angl. *microfacet*), ki so lokalno ravni (slika 2.8) in ki si jih predstavljamo kot optično gladke. Kompleksno mikrogeometrijo nadomestimo z makrogeometrijo, mikrogeometrijsko obnašanje svetlobe pa simuliramo v senčilnem modelu.

Mikropovršinski elementi so premajhni, da bi jih lahko videli na makroskopski ravni in vsak piksel računalniškega izrisa pokriva mnogo posameznih elementov. Poleg tega so v veliki meri naključno orientirani. Zaradi tega je smiselno, da jih obravnavamo statistično. Vsak element karakteriziramo z njegovo *mikronormalo*, skupek normal pa opišemo s porazdelitvijo.



Slika 2.8: Mikrogeometrija. Levo: shematičen prikaz mikropovršine in njej ustrezne makropovršine.



Slika 2.9: Mikrogeometrijsko senčenje, maskiranje in večkratni odboji

Za mnogo površin je večina mikronormal zelo blizu običajni makroskopski površinski normali. Porazdelitev ima zato značilen vrh (angl. *peak*). Bolj hrapave površine imajo manj izrazit vrh, mikronormale so bolj razpršene. Z razporeditvijo mikronormal lahko razložimo velike razlike v izgledu med hrapavimi in gladkimi površinami istega materiala. Gladke površine zrcalijo vpadne svetlobne žarke pretežno v smer popolnega zrcalnega odboja - zato so odsevi ostri in jasni, hrapave površine pa vpadne žarke bolj razpršijo, kar pomeni, da opazovalca dosežejo žarki iz različnih točk na površini - zato so odsevi zamegljeni (angl. *blurry* ali *glossy*).

Nekatere površine imajo značilno strukturirano mikrogeometrijo: pri ra-

znem blagu (na primer saten, žamet), pa tudi brušenih kovinah (gospodinjska posoda) lahko pod povečavo opazimo vzorce - vzdolžne ureze, vlakna in podobno. Ti vzorci pomenijo, da površina razprši vpadno svetlobo preferenčno v določene smeri (na primer pravokotno na vzdolžne ureze). Pravimo, da so te površine anizotropne (angl. *anisotropic*). V makroskopskem svetu so za takšne površine značilne vzdolžne zameglitve odsevov.

V teoriji mikropovršin upoštevamo več geometrijskih situacij, ki vplivajo na odbojnost. Na seriji slik 2.9 so dokumentirane tri situacije. Na levi vrh reliefa blokira del vpadne svetlobe, zato del mikropovršine ni osvetljen - senčenje (angl. *shadowing*). Na sredini je označen zrcaljen žarek, ki pa ga relief blokira in zato ne doseže opazovalca - maskiranje (angl. *masking*). V situaciji na desni se vpadni žarek večkrat zrcali (angl. *interreflection*).

Izkaže se, da bi mikropovršinski elementi z ostrimi prehodi (kot na skici) sami povzročali valovne pojave (difrakcijo), ki jih ne bi mogli zanemariti. Vendar je teorija mikropovršin še vedno pravilna, če mikropovršino predstavimo kot valovito, a brez ostrih sprememb [15]. Zaradi nazornosti lahko o mikropovršini razmišljamo kot o zbirki elementov, enačbe v nalogi se ne spremenijo.

Poglavje 3

BRDF

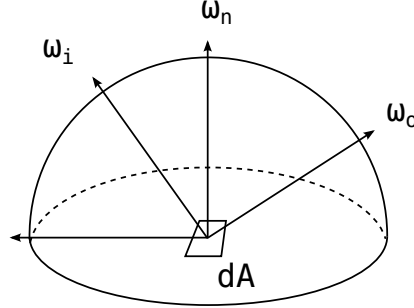
Z radiometričnimi koncepti definiranimi in osnovnim razumevanjem mikroskopskega videza površin se lahko sedaj lotimo *modeliranja* interakcije svetlobe s površinami. Na voljo je veliko možnosti, vendar bo za nas dovolj, da se omejimo na enostavnejši matematični model, ki zajema relativno širok nabor materialov - BRDF (angl. *bidirectional reflectance distribution function*).

3.1 Definicija

Zamislimo si točko x na površini, ki nas zanima. Točka leži na diferencialno majhnem območju s površino dA , kjer predpostavimo lokalno ravninskost (slika 3.1). Predpostavimo tudi, da je osvetljenost na tem kosu površine enakomerna. Naj na dA pada svetloba iz majhnega stožca smeri okoli neke specifične smeri ω_i . Vpadno svetlobo konkretnije opišemo z radianco $L_i(\omega_i)$, stožec smeri pa z diferencialnim prostorskim kotom $d\omega_i$. Celotna zbrana svetloba iz smeri ω_i je potem obsevanost

$$dE(\omega_i) = L_i(\omega_i) (\omega_i \cdot \omega_n) d\omega_i = L_i(\omega_i) \cos \theta_i d\omega_i$$

Natančneje, to je površinska gostota svetlobnega toka na dA . Obsevanost običajno ne srečamo kot usmerjeno kvantiteto (ampak kot mero toka fotonov iz vseh meri), vendar v tem primeru razmišljamo o specifičnem naboru smeri



Slika 3.1: Geometrijska konfiguracija. Točka x leži na območju dA .

(in diferencialno majhnem). Enote se (seveda) ujemajo: radianco merimo v $\text{W}/(\text{m}^2\text{sr})$, prostorski kot v steradianih in obsevanost v W/m^2 .

Zbrana svetloba je po odboju razpršena v vseh smereh. Izkaže se, da je odhodna radianca *sorazmerna* z obsevanostjo (predpostavljamo linearnost svetlobe) [38]. Z drugimi besedami, več fotonov, kot prispe na površino, več jih bo površino tudi zapustilo. Vzemimo specifično smer ω_o in si oglejmo odhodno radianco samo v tej smeri. Naj bo $dL_o(\omega_o)$ diferencialna odhodna radianca, to je prispevek obsevanosti $dE(\omega_i)$ k celotni odhodni radianci:

$$dL_o(\omega_o) \propto dE(\omega_i)$$

Definicija BRDF je potem konstanta sorazmerja med tema kvantitetama:

$$f(\omega_i, \omega_o) = \frac{dL_o(\omega_o)}{dE(\omega_i)} = \frac{dL_o(\omega_o)}{L_i(\omega_i) \cos \theta_i d\omega_i}$$

BRDF je štiridimenzionalen - smeri ω_i , ω_o sta dvodimenzionalni kvantiteti, pogosto specificirani v sferičnih koordinatah s po dvema kotoma θ (zenit) in ϕ (azimut).

Na isto definicijo lahko gledamo še nekoliko drugače. Namesto o gostoti svetlobnega toka lahko govorimo o celotnem svetlobnem toku, ki prihaja na dA :

$$d\Phi(\omega_i) = L_i(\omega_i) \cos \theta_i d\omega_i dA$$

Obsevanost smo torej pomnožili s površino obravnavanega območja. Svetlobni tok, ki ga dA oddaja (zaradi $d\Phi(\omega_i)$) je potem podobno

$$d\Phi(\omega_o) = dL_o(\omega_o) \cos \theta_o d\omega_o dA$$

Uporabljamo diferencialno odhodno radianco $dL_o(\omega_o)$, ker je celotna $L_o(\omega_o)$ odvisna še od drugih vpadnih smeri ω_i . BRDF je definiran kot razmerje med odhodno radianco in vpadnim svetlobnim tokom na enoto površine:

$$f(\omega_i, \omega_o) = \frac{dL_o(\omega_o)}{d\Phi(\omega_i)/dA} = \frac{dL_o(\omega_o)}{L_i(\omega_i) \cos \theta_i d\omega_i}$$

BRDF (enota sr^{-1} , vrednosti $\in [0, \infty)$) je definiran kot razmerje diferencialnih količin in ne direktno kot razmerje obsevanosti E z odhodno radianco L_o , ker želimo izraziti odbojnost površine specifično za točno določeno vpadno in odhodno smer. Celotna odhodna radianca $L_o(\omega_o)$ je rezultat odboja vpadne radiance iz vseh smeri in jo izračunamo z integriranjem po vseh smereh:

$$L_o(\omega_o) = \int_{\omega_i \in \Omega(\omega_n)} f(\omega_i, \omega_o) L_i(\omega_i) \cos \theta_i d\omega_i \quad (3.1)$$

To je enačba odboja (angl. *reflectance equation*). V nalogi bomo zanjo uporabljali termin senčilna enačba, ker bo za nas predstavljala glavni predmet obravnave oziroma enačbo, ki jo bomo želeli izračunati v procesu senčenja. Poudarimo, da je hemisfera $\Omega(\omega_n)$ definirana z $(\omega_i \cdot \omega_n) > 0$, kar pomeni, da skalarni produkt v senčilni enačbi ($\cos \theta_i$) nikoli ne zavzame negativne vrednosti. Posledično nam ni potrebno morebitne negativne vrednosti omejiti na 0 z $\langle \omega_i \cdot \omega_n \rangle$.

3.2 Sorodniki

To je najbrž primeren trenutek, da BRDF umestimo v širšo družino sorodnih funkcij (živalski vrt BxxDF). BRDF je pravzaprav samo poseben primer modela BSDF (angl. *scattering*). Medtem, ko smo se omejili na smeri ω_i , ω_o v hemisferi $\Omega(\omega_n)$ nad površinsko točko, BSDF obravnava smeri v celotni

sferi Θ . Tako združuje odboj in prenos svetlobe v drugo snov. Definicija in enačba odhodne radiance ostaneta praktično enaki [38], le skalarnemu produktu $(\omega_i \cdot \omega_n)$ vzamemo absolutno vrednost $|\omega_i \cdot \omega_n|$. Za obravnavo v tej diplomski nalogi bo BRDF dovolj. Kadar $\omega_i \notin \Omega$ ali $\omega_o \notin \Omega$, bomo privzeli $f(\omega_i, \omega_o) = 0$.

Odbojnost resničnih površin variira z lokacijo na površini. Eksplicitno bi lahko variabilnost v BRDF zapisali kot $f(x, \omega_i, \omega_o)$. Običajno bomo predpostavili, da je variabilnost očitna, in bomo zapis x izpuščali. V literaturi najdemo obravnavo spreminjajočega se BRDF poimenovano SVBRDF (angl. *spatially varying*).

Pomembna predpostavka v definiciji BRDF je *lokalnost* odboja. Predpostavljamo, da je odhodna radianca odvisna samo od vpadne radiance (in odbojnosti površine) v specifični točki na površini. V marsikaterem resničnem materialu svetloba pod površino prepotuje nezanemarljivo razdaljo in izstopi v drugi točki y . Neka točka tako integrira vpadno svetlobo iz širšega območja. BSSRDF (angl. *subsurface scattering reflectance*) $f(x, \omega_i, y, \omega_o)$ modelira te materiale. BRDF je izpeljan iz BSSRDF v [27].

Poleg tega je odbojnost površin, podobno kot ostale radiometrične količine, spektralna (različna za različne valovne dolžine). V nalogi se bomo omejili na standardno RGB obravnavo spektralnih količin.

3.3 Fizikalne omejitve

Vsi BRDF v resničnem svetu upoštevajo omejitve zakonov termodinamike [38]. Prva omejitev je pravilo vzajemnosti (angl. *reciprocity*):

$$f(\omega_i, \omega_o) = f(\omega_o, \omega_i) \quad (3.2)$$

torej, da lahko zamenjamo vpadno in odhodno smer (vir svetlobe in opazovalca). Vzajemnost je koristna pri meritvah resničnih materialov, ker je potrebno hraniti samo polovico podatkov [25]. V praksi je vzajemnost pogosto kršena [1]. BRDF lahko interpretiramo na dva načina. Lahko si predstavljamo, da za dan vpadni žarek iz ω_i funkcija f podaja porazdelitev razpršene

svetlobe po odboju žarka. Ekvivalentno, za dano smer proti opazovalcu ω_o , f podaja porazdelitev prispevkov svetlobe iz vseh smeri, proti opazovalcu.

Druga omejitev je ohranitev energije (angl. *energy conservation*). Iz zahteve $M \leq E$ (izsevnost manjša ali enaka obsevanosti) lahko izpeljemo [24]:

$$\int_{\Omega} f(\omega_i, \omega_o) \cos \theta_o d\omega_o \leq 1 \quad \forall \omega_i \in \Omega \quad (3.3)$$

Preprosteje, površina ne more oddati več energije, kot je prejme (razen če jo sama proizvaja). Za vsako vpadno smer mora biti integral čez vse odhodne smeri zgoraj kvečjemu enak 1. Preostalo energijo površina absorbira v obliki toplotne energije. Nekateri algoritmi upodabljanja zahtevajo upoštevanje ohranitve energije, v računalniški grafiki pa striktno upoštevanje ni tako pomembno. Poudarimo, da ima BRDF lahko vrednosti > 1 , pravzaprav te navzgor niso omejene, le zgornji integral mora biti kvečjemu 1.

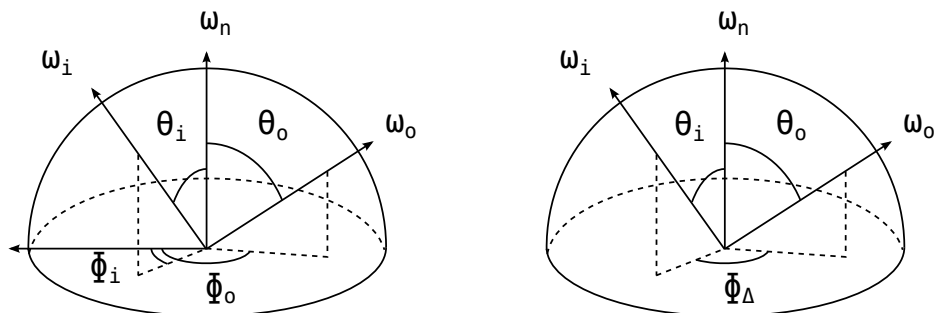
3.4 Lambert

Že Lambert je opazil, da veliko površin izgleda skoraj enako ne glede na smer pogleda. Natančneje, odhodna radianca $L_o(\omega_o)$ je konstantna (enaka za poljuben ω_o). Če si ogledamo senčilno enačbo (enačba 3.1) za ta primer, opazimo, da iz konstantnosti odhodne radiance sledi konstantnost f (vpadna radianca se ne spreminja). Potem lahko iz zahteve po ohranitvi energije dobimo:

$$f(\omega_i, \omega_o) \int_{\Omega} \cos \theta_o d\omega_o \leq 1$$

$$\Rightarrow f(\omega_i, \omega_o) \leq \frac{1}{\pi}, \quad f(\omega_i, \omega_o) = \frac{k_d}{\pi}$$

kjer je k_d vrednost med 0 in 1. Dobili smo standardni Lambertov model, ki ga v računalniški grafiki še vedno široko uporabljamo za simulacijo pod-površinskega razprševanja. Čeprav smo uporabili zahtevo po ohranitvi energije, je Lambertov model bolj matematično priročen kot pa fizikalno utemeljen. Še dve opombi. Skalarni produkt med smerjo proti viru svetlobe in



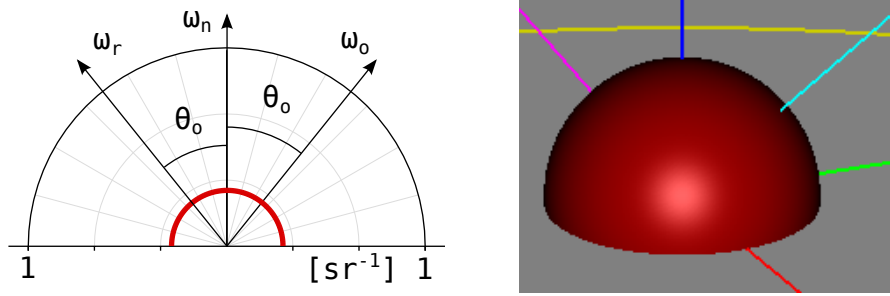
Slika 3.2: Splošni BRDF in izotropni BRDF.

normalo ($\omega_i \cdot \omega_n = \cos \theta_i$), ki nastopa v senčilnem programu v implementaciji Lambertovega modela, je del senčilne enačbe in ne modela BRDF. Koeficient k_d (RGB) je pogosto poimenovan albedo, čeprav se razlikuje od večih podobnih konceptov v astronomiji in klimatologiji.

3.5 Vizualizacija

Posvetimo se vizualizacijam modelov BRDF. Splošen BRDF je funkcija štirih kotov (slika 3.2 levo). Na površini moramo izbrati tangento v primeru anizotropnih površin, kjer rotacija površine okoli normale (vire svetlobe in opazovalca pa držimo pri miru) spreminja odhodno radianco. Ali ekvivalentno, če opazovalca in vire svetlobe rotiramo okoli normale, objekt pa držimo pri miru (torej se spreminjata kota ϕ_i in ϕ_o , oba na enak način), se v primeru takšnih površin odhodna radianca spreminja. Pri velikem številu resničnih površin se odhodna radianca spreminja zanemarljivo malo (izotropnost), kar pomeni, da referenčne tangente ne potrebujemo. Pomembna je samo kotna razlika $\phi_\Delta = |\phi_i - \phi_o|$ med projekcijama vpadne in odhodne smeri. BRDF je torej v teh primerih (ki so bistveno pogostejše obravnavani) samo 3D.

Vendar je funkcijo treh kotov še vedno težko vizualizirati. Ena možnost je, da izberemo nek vpaden ali odhoden kot in fiksiramo $\phi_\Delta = 180^\circ$. Vektorji



Slika 3.3: Lambertov BRDF, koeficient $k_d = 0.84$.

ω_i, ω_o in ω_n potem ležijo v skupni ravnini, ki ji pravimo vpadna ravnina (angl. *plane of incidence*). Ta konfiguracija je pomembna, ker je tipično območje največje aktivnosti. Na sliki 3.3 levo je izrisan polarni graf Lambertovega modela. Izbrali smo odhodni kot $\theta_o = 36^\circ$, čeprav je Lambertov model konstanten, in bi dobili enak graf za poljuben odhodni kot. Graf preteče vse možne vpadne smeri (v vpadni ravnini). Na sliki desno je 3D ilustracija podobne situacije, le da vpadna smer tukaj preteče celotno hemisfero. Polarni graf na levi je samo prerez skozi graf na desni.

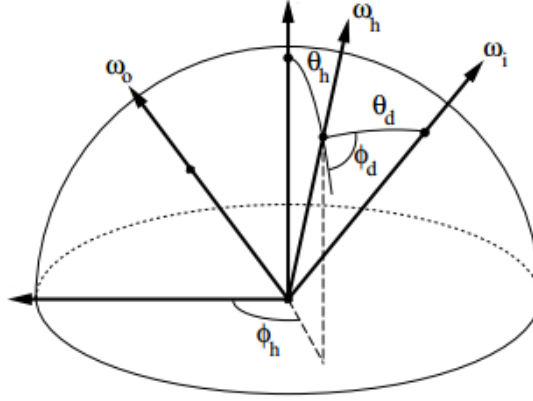
Na grafu 3.3 prvič predstavimo tudi zrcalni vektor ω_r . V tej nalogi bo ta vektor vedno zrcaljen vektor pogleda (odhodna smer). Kot med zrcalnim vektorjem in normalo je enak kotu med odhodno smerjo in normalo. Izkaže se, da je ta vektor zelo pomemben, saj tipični BRDF dosežeje maksimum blizu te smeri.

3.6 Rusinkiewicz parametrizacija

Definirajmo še en pomemben vektor. Na sliki 3.4 je narisani kompromisni vektor ω_h (angl. *half vector*):

$$\omega_h = \frac{\omega_i + \omega_o}{\|\omega_i + \omega_o\|}, \quad (\omega_i \cdot \omega_h) = (\omega_o \cdot \omega_h) = \cos \theta_d \quad (3.4)$$

torej vektor ravno na sredi med vpadnim in odhodnim vektorjem. Kompromisni vektor je ključen del mikropovršinskih modelov. Hkrati so na sliki



Slika 3.4: Kompromisni vektor, Rusinkiewicz parametrizacija BRDF.

označeni alternativni koti, ki jih lahko uporabimo za opis konfiguracije. Predstavljeni v [32], omogočajo kompaktnejši zapis tipičnih modelov BRDF. Namesto kotov $\theta_i, \phi_i, \theta_o, \phi_o$ imamo kot med kompromisnim vektorjem in normalo θ_h , kot med kompromisnim vektorjem in vpadnim/odhodnim vektorjem θ_d ter kota ϕ_d in ϕ_h (ki ga lahko izpustimo za izotropne površine).

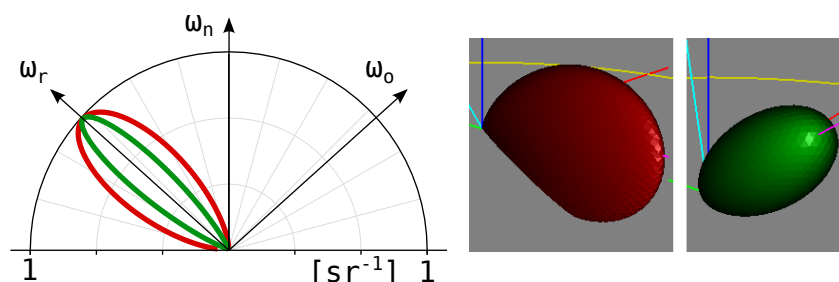
3.7 Phong in Blinn-Phong

Oglejmo si dva zgodovinsko pomembna empirična modela. Modela Phong [30] in Blinn-Phong [5] lahko karakteriziramo z zapisom:

$$f_p(\omega_i, \omega_o) \propto (\omega_r \cdot \omega_i)^m$$

$$f_b(\omega_i, \omega_o) \propto (\omega_h \cdot \omega_n)^m$$

Izpustili smo sorazmernostne konstante, h katerim se bomo še vrnil. Prav tako smo izpustili ambientno in razpršilno komponento, ki običajno nastopata (prišteti k zrcalni komponenti zgoraj). Oba modela sta empirična, s čimer mislimo na izbiro skalarnega produkta (oziroma kosinusa ustreznega kota) zaradi računske učinkovitosti in ne na podlagi fizikalne smiselnosti. Prvotni



Slika 3.5: Modela Phong (zelena) in Blinn-Phong (rdeča) za odhodni kot $\theta_o = 48^\circ$. Eksponent $m = 42$. Desno: primerjava Blinn-Phong in Phong lobusa v treh dimenzijah. Vir: Disney BRDF Explorer [10].

Phong (zrcalna komponenta deljena še z $(\omega_i \cdot \omega_n)$) pravzaprav ni bil niti vzajemen niti ni ohranjal energije [24]!

Na grafu 3.5 sta upodobljena oba modela hkrati pri istem odhodnem kotu in isti vrednosti eksponenta m . Krivulji, ki nastaneta, imenujemo zrcalni lobus (angl. *specular lobe*). Opazimo lahko, da dosežeta maksimum točno v smeri ω_r . Z oddaljevanjem od zrcalne smeri hitro padeta na skoraj 0 (višji eksponent m , hitreje).

Zrcalna lobusa modelov sta si precej podobna in pogosto lahko dobimo primerljive rezultate, če v modelu Blinn-Phong uporabimo štirikrat večji eksponent [1, 23]. Vendar slika 3.5 desno razkrije bistveno razliko med modeloma. Z večanjem vpadnega kota se Blinn-Phong lobus zoža, medtem ko Phong ostane simetričen okoli zrcalne smeri ω_r . V prerezu vpadne ravnine tega ni mogoče videti. Eksperimentalni podatki kažejo, da se to zožanje pojavi tudi na resničnih površinah [26], kar utemeljuje uporabo kompromisnega vektorja v BRDF modelih (vendar Blinn-Phong ne upošteva nekaterih drugih značilnosti resničnih površin).

3.8 Izmerjeni BRDF

Kako torej izgledajo resnične površine? Na voljo imamo MERL zbirko izmerjenih BRDF [25]. Zbirka obsega 100 izotropnih materialov, med drugim kovine, plastike, barve in tkanine. Podatki so prosto dostopni in se redno pojavljajo v raziskavah novih modelov.

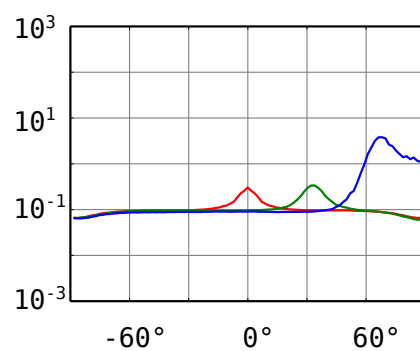
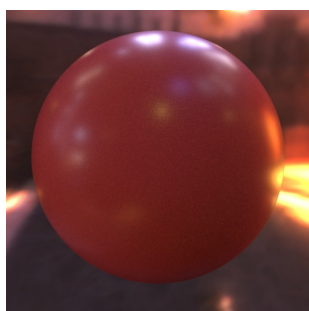
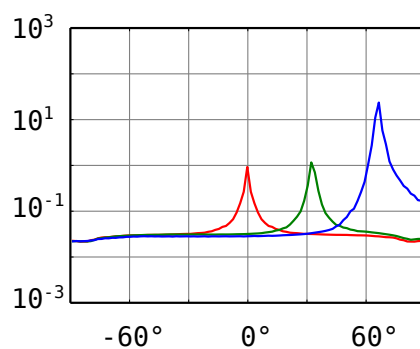
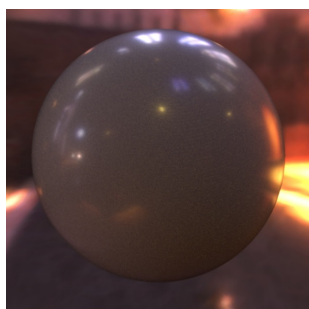
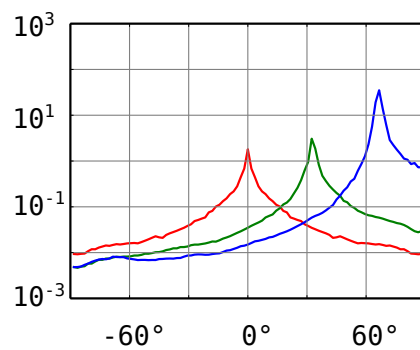
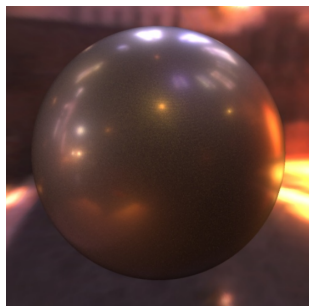
Oglejmo si nekaj primerov. Na slikah 3.6 smo poleg referenčnih upodobitev postavili grafe pripadajočih BRDF. Ker imajo vrednosti velik razpon, smo uporabili logaritemsko os (v sr^{-1}). V podatkih so BRDF shranjeni kot RGB, zato smo za ilustracije uporabili samo R komponento. Na vsakem grafu so tri krivulje v vpadni ravnini za tri različne odhodne kote θ_o , 0° , 33° in 66° .

Opazimo lahko izrazite vrhove v zrcalnih smereh. Poleg tega vrhovi rastejo skupaj z odhodnim kotom. To razložimo s Fresnelovim pojavom. Na referenčnih slikah je mogoče opaziti povečano odbojnost na obodu sfer.

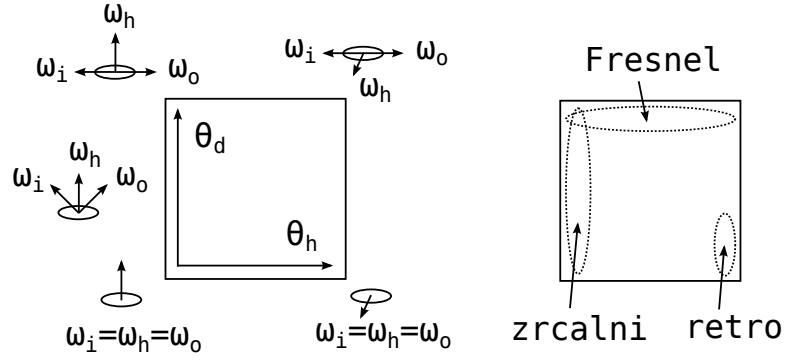
Zanimiva je tudi primerjava med plastiko (ter barvo) in kovino. Pri kovini so zrcalni vrhovi višji, vrednosti v ostalih smereh pa so lahko nižje kot pri plastiki in barvi. Razlog je v podpovršinskem razprševanju, ki je prisotno pri plastiki in barvi, in dodaja skoraj konstantno vrednost čez vse smeri.

Obstajajo še druge vizualizacije, ki nam lahko pomagajo razumeti BRDF. Ena takšnih je predstavljena v [6] in jo je mogoče najti v pregledovalniku modelov [10]. Del BRDF je izrisan kot 2D graf, pri čemer sta osi kota θ_h in θ_d iz Rusinkiewicz parametrizacije. Vsak piksel na grafu je vrednost BRDF. Če se omejimo na izotropne površine, nam preostane še kot ϕ_d , ki ga fiksiramo.

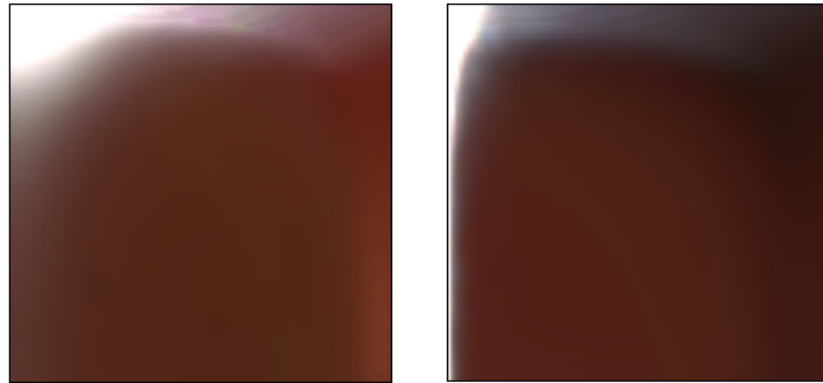
Izkaže se, da je najbolje izbrati $\phi_d = 90^\circ$, ker v tem primeru dobimo graf z največ informacijami. Primer grafa, ki nastane, je na sliki 3.8. Oglejmo si ga podrobneje. Ob levem robu je $\theta_h \approx 0^\circ$, torej je kompromisni vektor zelo blizu normale. Iz poravnosti kompromisnega vektorja z normalo sledi, da pravzaprav opazujemo vpadno ravnino. Ob zgornjem robu velja $\theta_d \approx 90^\circ$. Opravka imamo z zelo položnimi koti. Kot smo opazili na prejšnjih grafih, odbojnost tipično raste z večanjem vpadnega/odhodnega kota (Fresnel). Ob spodnjem robu so vsi vektorji poravnani. V tej konfiguraciji opazujemo od-



Slika 3.6: MERL *alum-bronze*, *gray-plastic* in *purple-paint*. Graf BRDF za tri odhodne kote θ_o , 0° (rdeča), 33° (zelena) in 66° (modra). Horizontalna os: vpadni kot θ_i (negativne vrednosti pomenijo "drugo stran" normale). Vertikalno: BRDF (sr^{-1}).



Slika 3.7: Shema informacij v vizualizaciji. Kot θ_h med kompromisnim vektorjem in normalo ima vrednosti med 0° in 90° . Kot θ_d je kot med kompromisnim vektorjem in vpadno ali odhodno smerjo. Ima vrednosti med 0° in maksimalno 90° (maksimalna vrednost je odvisna od kotov ϕ_d in θ_h , ω_i ali ω_o sta lahko pod ravnino površine).



Slika 3.8: Materiala *red-plastic* in *red-specular-plastic*.

bojnost površine nazaj proti viru svetlobe (angl. *retroreflection*). V nalogi obravnavamo model specifično namenjen retroodboju.

Interesiranemu bralcu priporočamo podrobnejše analize MERL materialov v [6] in [11].

Poglavje 4

Fizikalno osnovani BRDF

Sekcije v tem poglavju so urejene deloma kronološko in deloma po idejah. Začeli bomo z uvodom v mikropovršinske modele, nadaljevali z nekaterimi izbranimi primeri, v zadnjem delu pa bomo obravnavali mikropovršinske modele v splošni obliki.

4.1 Torrance-Sparrow, Blinn, Cook-Torrance

Torrance in Sparrow sta v članku [37] iz leta 1967 uporabila teorijo mikropovršin, da sta razložila porazdelitev odboja elektromagnetnega valovanja s hrapavih površin. Specifično, zanimalo ju je, zakaj je maksimalen odboj dosežen pri kotu, večjem od zrcalnega, kar je bilo razvidno iz eksperimentalnih podatkov na področju toplotne radiacije. Članek je bil objavljen na področju optike - še pred resnimi začetki 3D računalniške grafike. Teorija mikropovršin je pravzaprav še desetletja starejša, vendar je veliko starejših modelov imelo nesmiselne napovedi, kot na primer neskončnosti pri velikih vpadnih kotih.

Torrance in Sparrow sta z senčenjem in maskiranjem mikropovršinskih elementov uspešno pojasnila ne-zrcalen maksimalni odboj. Poleg tega njun model napoveduje končne vrednosti BRDF za položne kote.

V nadaljevanju bomo izpeljali moderno obliko njunega modela. Končen

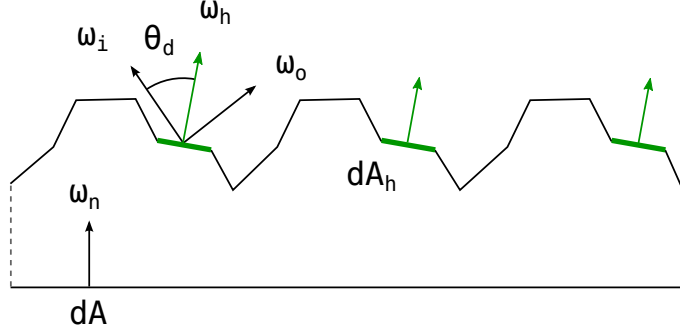
model je pravzaprav poseben primer splošnega mikropovršinskega modela. Torrance in Sparrow predpostavljata, da je površina sestavljena iz mikropovršinskih elementov, ki so idealna zrcala (in jih torej lahko opišemo s Fresnelovim zakonom). Kot smo že omenili, mikropovršino obravnavamo statistično. Potrebujemo način, kako opisati usmerjenost posameznih elementov. Ena možnost je, da usmerjenost specificiramo z normalami elementov ω_h in podamo verjetnost, da ima element neko normalo. Porazdelitev $D(\omega_h)$ je takšen pristop. Podrobneje bomo o komponenti D mikropovršinskih modelov govorili kasneje, zaenkrat potrebujemo samo osnovno definicijo [39]:

$$D(\omega_h) d\omega_h dA$$

je del mikropovršine nad makropovršinskim elementom dA z normalami znotraj prostorskega kota $d\omega_h$ okoli smeri ω_h . Koncept je manj zastrašujoč kot izgleda ob prvem branju. Ilustracija 4.1 pojasnjuje definicijo. Mikropovršino (resnična hrapava površina) nadomestimo z idealizirano makropovršino objekta. Z drugimi besedami, v procesu upodabljanja makropovršina ustreza geometriji objekta, mikropovršino pa simuliramo z BRDF. Obravnavamo diferencialno območje s površino dA (podobno kot pri definiciji BRDF predpostavimo lokalno ravninskost). Hkrati je dA dovolj velik, da pokriva mnogo mikropovršinskih elementov. Na ilustraciji smo označili del mikropovršine iz definicije porazdelitve normal D. Mikropovršinski element je samo del mikropovršine (tehnično mora biti mikropovršina gladka, kot smo že omenili), in jih uporabljamo za lažje razumevanje situacije.

Ni naključje, da smo normale na mikropovršini označili z ω_h , enako kot kompromisni vektor. Predpostavili smo, da so elementi popolna zrcala, torej da zrcalijo vpadno radianco v eno samo smer. Elementi z normalo $\omega_h = (\omega_i + \omega_o)/\|\omega_i + \omega_o\|$ so ravno tisti, ki zrcalijo vpadno radianco iz ω_i v smer ω_o ! Ostali ne sodelujejo (bodo pa zrcalili radianco iz drugih vpadnih smeri).

Zaenkrat predpostavimo, da so obravnavani elementi povsem vidni iz smeri ω_i in ω_o (zanemarimo senčenje in maskiranje). Potem lahko izračunamo



Slika 4.1: Mikro- in makropovršina, mikropovršinski elementi. Z zeleno smo obarvali del mikropovršine z ustreznimi normalami. Skupna površina tega dela je po definiciji enaka $D(\omega_h) d\omega_h dA$. Kota θ_i in θ_o sta kot običajno kota med ω_i (ω_o) in makropovršinsko normalo ω_n .

vpadni svetlobni tok na del mikropovršine z normalo ω_h :

$$d\Phi(\omega_i) = L_i(\omega_i) \cos \theta_d d\omega_i dA_h$$

Izračun je zelo podoben tistemu, ki smo ga opravili pri definiciji BRDF, le normala je sedaj ω_h . Kot θ_d je kot med ω_h in ω_i oziroma ω_o . dA_h je del mikropovršine, ki ga obravnavamo (z normalo ω_h), torej ravno $D(\omega_h) d\omega_h dA$ iz definicije zgoraj. Iz predpostavke, da so elementi idealna zrcala, lahko po Fresnelu izračunamo neposredno zrcaljen svetlobni tok $d\Phi(\omega_o) = F(\theta_d) d\Phi(\omega_i)$.

To je vse, kar potrebujemo, le še v ustreznem prostoru moramo kvantitete izraziti. Porazdelitev $D(\omega_h)$ je definirana v prostoru normal mikropovršine, nas pa zanima BRDF makropovršine (BRDF mikropovršine je idealno zrcalo, kot smo že omenili). Zanima nas torej odhodna radianca, ki je po definiciji enaka

$$L_o(\omega_o) = \frac{d\Phi(\omega_o)}{\cos \theta_o d\omega_o dA} \quad (4.1)$$

Diferencialna prostorska kota $d\omega_o$ in $d\omega_h$ nista neodvisna (ω_h je ravno na

polovici med ω_i in ω_o), s pomočjo trigonometrije lahko izpeljemo [29]:

$$d\omega_h = \frac{d\omega_o}{4 \cos \theta_d}$$

Če vse skupaj nesemo v definicijo BRDF (razmerje med odhodno radianco in obsevanostjo), se večina faktorjev izgubi, preostane nam samo

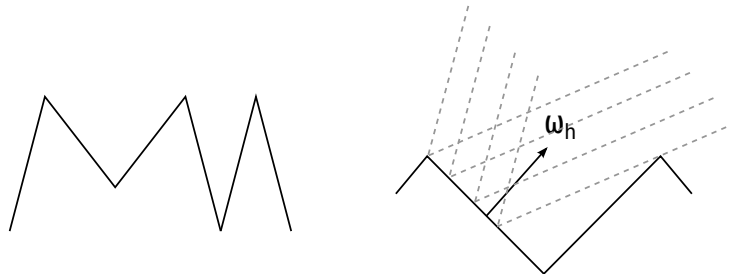
$$f(\omega_i, \omega_o) = \frac{F(\theta_d) D(\omega_h)}{4 \cos \theta_i \cos \theta_o}$$

To je osnovni rezultat, ki smo ga iskali. Poudarimo, da smo porazdelitev D pustili v splošni obliki - izpeljava je pravilna za poljubno porazdelitev. Če torej zanemarimo senčenje in maskiranje, je dovolj izbrati D ter koeficiente za Fresnelove enačbe, končen BRDF pa je povsem določen s to izbiro. Seveda je v praksi tudi D samo aproksimacija resnične mikropovršine.

Torrance in Sparrow sta v model dodala tudi geometrijski faktor G, definiran kot delež mikropovršine z normalo ω_h , viden tako v smeri ω_i kot v ω_o . Z drugimi besedami, ker lahko mikropovršina sama nase meče senco in ker je del odbitega svetlobnega toka maskiran (ponovno zadane mikropovršino), smo v zgornjem rezultatu vrednosti BRDF precenili. Natančneje bomo o geometrijskem faktorju govorili kasneje, zaenkrat samo zapišimo popravljen rezultat:

$$f(\omega_i, \omega_o) = \frac{F(\theta_d) G(\omega_i, \omega_o, \omega_h) D(\omega_h)}{4 \cos \theta_i \cos \theta_o} \quad (4.2)$$

Specifično, geometrijski faktor, kot sta ga predstavila Torrance in Sparrow, predpostavlja mikropovršino, sestavljeno iz simetričnih urezov v obliki črke V (ilustracija 4.2). Zgornji robovi vseh V-urezov ležijo v isti ravnini, imajo pa različne globine. Vpadna svetloba iz smeri blizu normale ω_n osvetli praktično celotne ureze. Odbita svetloba je razpršena v mnogo smeri, odvisno od normal posameznih elementov mikropovršine (porazdelitev D določa število elementov s specifično usmeritvijo). Pri bolj položnih vpadnih smereh je del urezov v senci. Ker smo zgornje robove urezov fiksirali v skupno ravnino, lahko posamezen urez senči samo sebe, nima pa vpliva na sosednje ureze. Prav tako je del odbite svetlobe maskiran. Takšen model mikropovršine je manj realističen, vendar je priročen, ker je mogoče enostavno



Slika 4.2: Mikropovršina v Torrance-Sparrow modelu, sestavljena iz simetričnih V-urezov. Desno: senčenje ali maskiranje (odvisno od izbire ω_i in ω_o).

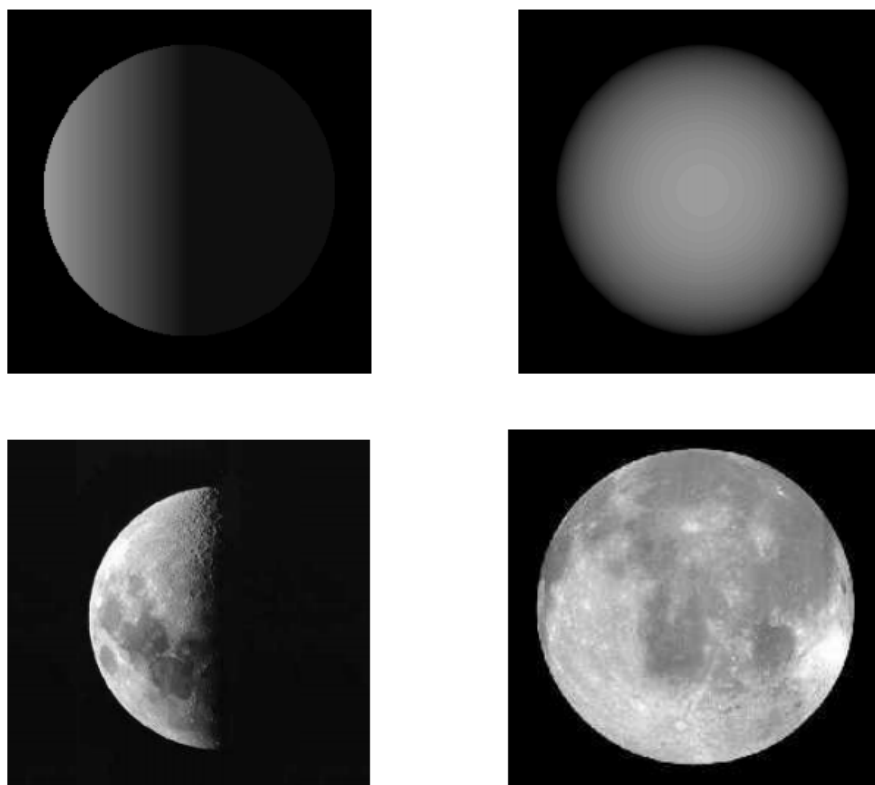
izračunati geometrijski faktor. Blinn je v članku [5] izpeljal G v obliki

$$G(\omega_i, \omega_o, \omega_h) = \min \left[\frac{2 \cos \theta_h \cos \theta_o}{\cos \theta_d}, \frac{2 \cos \theta_h \cos \theta_i}{\cos \theta_d}, 1 \right] \quad (4.3)$$

Cook in Torrance sta kasneje [9] model Torrance-Sparrow prenesla na področje računalniške grafike. V literaturi zato pogosto najdemo ime Cook-Torrance za isti model ali pa s Cook-Torrance avtorji mislijo specifično na zgornji geometrijski faktor.

4.2 Oren-Nayar

Podpovršinsko razprševanje (lokalno) v računalniški grafiki največkrat modeliramo z Lambertovim modelom, predvsem zaradi enostavnosti in relativne točnosti. Vendar se za precejšnje število materialov (na primer glina, beton, kreda, mavec, pesek) ta model izkaže za netočno aproksimacijo. Odboj s takšnih materialov ni enakomeren v vseh smeri (kot pravi Lambert), ampak je povečan v smereh blizu smeri nazaj proti viru svetlobe. Takšno ne-Lambertovo obnašanje je bilo opaženo in raziskovano že v preteklosti, po-



Slika 4.3: Lambertov model in Luna, osvetljena na podoben način.

gosto motivirano z videzom Lune (robovi diska polne Lune so enako svetli kot sredina, kar je v nasprotju z robnim temnenjem pri Lambertu, lunin regolit namreč razprši vpadno svetlobo močnejše nazaj proti Soncu, Zemlja pa je takrat med astronomskima telesoma, slika 4.3).

Razlog je primarno v dejstvu, da Lambertov model ne upošteva površinske hrapavosti. Čeprav sta površinski in podpovršinski odboj distinktno drugačna pojava, moramo v primeru dovolj velikih mikropovršinskih elementov le-te upoštevati tudi pri podpovršinskem odboju [15].

Oren in Nayar [28] sta predpostavila podoben model mikropovršine kot Torrance in Sparrow (simetrični V-urezi, maskiranje, senčenje), le da sta za vsak mikropovršinski element privzela Lambertov odboj in ne popolnega zrcalnega odboja. Lambertov odboj na posameznem elementu je smiseln, če

predpostavimo, da so ti elementi veliki (podpovršinsko razprševanje se zato ne razteza čez več elementov). Njun model lahko upošteva tudi večkratne odboje, ki smo jih pri Torrance-Sparrow modelu zanemarili in jih tudi sicer v mikropovršinskih modelih tipično zanemarimo. Ker izpeljan model ni imel zaključene oblike, sta Oren in Nayar sta poiskala aproksimacijo (poiskala sta več aproksimacij, predstavljamo najpogostejše uporabljano):

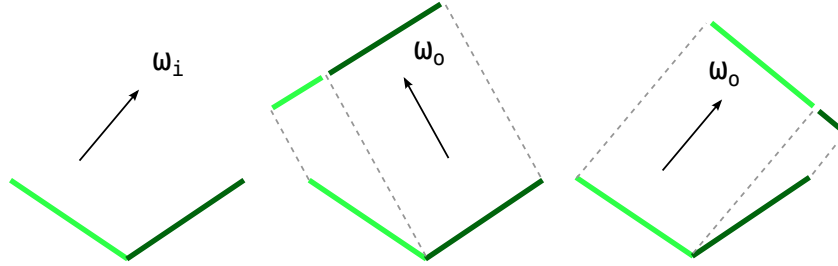
$$f(\omega_i, \omega_o) = \frac{k_d}{\pi} (A + B \sin \alpha \tan \beta \max(0, \cos \phi)) \quad (4.4)$$

kjer so

$$\begin{aligned} A &= 1 - \frac{0.5\sigma^2}{\sigma^2 + 0.33} \\ B &= \frac{0.45\sigma^2}{\sigma^2 + 0.09} \\ \phi &= \phi_i - \phi_o \\ \alpha &= \max(\theta_i, \theta_o) \\ \beta &= \min(\theta_i, \theta_o) \end{aligned} \quad (4.5)$$

V opombi v članku je omenjena možnost zamenjave vrednosti 0.33 v faktorju A z vrednostjo 0.57, kar naj bi izboljšalo aproksimacijo za večkratne mikropovršinske odboje. Edini parameter je torej parameter hrapavosti $\sigma \in [0, \infty)$, definiran kot standardni odklon kota med mikronormalo in makronormalo površine. σ mora biti v zgornjih izrazih podan v radianih. Opazimo lahko, da se pri vrednosti $\sigma = 0$ (kar pomeni, da so vsi elementi v skupni ravnini) model reducira v standardni Lambertov model. Faktorja A in B je mogoče izračunati vnaprej za določeno hrapavost. Glavna razlika med Oren-Nayar in Lambertovim modelom je manj temnenja pri položnejših kotih - predmeti so videti bolj ploščati.

Ilustracija 4.4 podaja intuicijo, kako mikropovršinski elementi vplivajo na podpovršinski odboj. Vzeli smo V-urez in ga osvetlili iz smeri ω_i . Ker predpostavljamo Lambertov odboj, bo levi element svetlejši od desnega. Vendar je za opazovalca z leve svetlejši element manjši (projicirana površina je manjša). Če premaknemo opazovalca na desno, proti viru svetlobe, bo zanj



Slika 4.4: V-urez, Lambertov odboj, dve različni smeri pogleda.

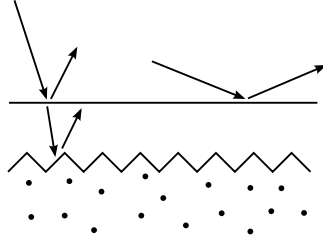
površina izgledala svetleje. To je v nasprotju z Lambertovim modelom, kjer površina izgleda enako, ne glede na smer opazovalca.

4.3 Shirley, Schlick, Ashikhmin-Shirley

Shirley [36] je izpostavil pomembno pomankljivost BRDF modelov: predpostavljali so neodvisnost podpovršinskega in površinskega odboja. Večina modelov se je posvetila površinskemu odboju, za razpršilno komponento pa je bil privzet Lambertov model. Celoten BRDF je tako tipično linearna kombinacija:

$$f(\omega_i, \omega_o) = \frac{k_d}{\pi} + k_s f_s(\omega_i, \omega_o) \quad (4.6)$$

kjer je f_s nek BRDF, ki modelira izključno površinski odboj, in k_s dodaten faktor (pogosto empiričen). To je sprejemljivo v primeru kovin, kjer ni podpovršinskega razprševanja ($k_d = 0$). Vendar k_s in k_d v splošnem nista neodvisna: večji kot je delež svetlobe, ki se odbije s površine, manj je na voljo za podpovršinsko razprševanje. Z večanjem vpadnega kota ($\theta_i \rightarrow 90$) postaja Fresnelov efekt izrazit - zrcali se večina vpadne svetlobe. Slika 2.6 demonstrira primer, kjer se pomembnost komponent spreminja s položajem opazovalca. V položnejših kotih razpršilna komponenta površine skoraj ni



Slika 4.5: Odvisnost razpršilne in zrcalne komponente. Gladka deloma transparentna prevleka.

več vidna. Shematičen prikaz 4.5 materiala z gladko prevleko, kjer je ta pojav še posebej opazen.

Shirley [36] je poskusil simulirati to odvisnost komponent od vpadnega kota z direktno vpeljavo Fresnelovega faktorja:

$$f(\omega_i, \omega_o) = (1 - F(\theta_i)) \frac{k_d}{\pi} + F(\theta_i) f_s(\omega_i, \omega_o)$$

Fresnelov faktor F ima najmanjšo vrednost pri $\theta_i = 0^\circ$, za večje vpadne kote pa raste do 1. Težava s to formulacijo je nespoštovanje vzajemnosti (če zamenjamo ω_i in ω_o , dobimo drugačen izraz), kar pomeni, da model ni fizikalno smiseln. Schlick [33] je med drugim predlagal podoben model, le vpadni kot θ_i je zamenjal s kotom θ_d (med kompromisnim vektorjem ω_h in vpadno oziroma odhodno smerjo). Kot je izpostavil Shirley [36], Schlickova ideja ne ohranja energije za vse vpadne kote.

Shirley in Ashikhmin [3] sta izboljšala ta pristop. Njun model je vzajemen in ohranja energijo kljub upoštevanju Fresnelovega efekta. Zrcalno komponento lahko zapišemo v obliki

$$f_s(\omega_i, \omega_o) = \frac{D(\omega_h) F(\theta_d)}{4 \cos \theta_d \max(\cos \theta_i, \cos \theta_o)}$$

in njej ustrezna razpršilna komponenta

$$f_d(\omega_i, \omega_o) = \frac{k_d}{\pi} \frac{28}{23} (1 - F_0) r(\omega_i) r(\omega_o)$$

$$r(\omega) = 1 - \left(1 - \frac{(\omega \cdot \omega_n)}{2}\right)^5$$

Ashikhmin-Shirley model je poznan po modeliranju anizotropnosti, kar smo v zgornjem zapisu skrili v porazdelitev mikronormal D (k tej specifični porazdelitvi se bomo še vrnili). Nenavadne konstante v razpršilni komponenti so rezultat normalizacije, ki zagotavlja ohranjanje energije (več o normalizaciji v naslednjem poglavju).

4.4 Walter, Weidlich, Wilkie

Na kratko predstavimo nekatere razširitve mikropovršinskih modelov.

Walter in drugi [39] v model mikropovršin vključijo simulacijo prenosa svetlobe skozi hrapave površine (na primer brušeno steklo). Predpostavijo, da se mikropovršinski element obnaša kot gladek deloma transparenten izolator - smer prenosa je določena s Snellovim zakonom, Fresnelove enačbe pa določajo deleža odboja in prenosa. Avtorji so tako izpeljali BSDF model (celotna sfera smeri). Podrobnosti presegajo okvir te naloge.

Weidlich in Wilkie [40] predstavijo metodo kombiniranja slojev mikropovršinskih modelov. Tako simulirajo keramične glazure (hrapava površina, prevlečena z gladkim izolatorjem), lakirane površine, avtomobilске barve (hrapava kovinska površina, prevlečena z gladkim izolatorjem) in še kopico drugih kombinacij. Upoštevajo absorpcijo znotraj slojev in tudi popoln notranji odboj. Njihov model je dovolj enostaven, da ga je mogoče uporabiti tudi v igrah [13].

4.5 Normaliziran Blinn-Phong

Definirajmo usmerjeno hemisferično odbojnost (angl. *directional-hemispherical reflectance*):

$$\rho(\omega) = \int_{\Omega} f(\omega, \omega_o) \cos \theta_o d\omega_o \quad (4.7)$$

To je enak izraz, kot smo ga zapisali pri fizikalnih omejitvah BRDF. Iz zahteve po ohranitvi energije mora veljati $\rho(\omega) \leq 1$ za vsak $\omega \in \Omega$. Usmerjena hemisferična odbojnost (v nadaljevanju krajše odbojnost) meri delež odbite svetlobe iz neke vpadne smeri ω , pri čemer nas zanima odbita svetloba v vseh smereh (hemisfere) nad površino.

Kot smo omenili, je Blinn-Phong empiričen model (ni izpeljan iz fizikalnih osnov). Vseeno je smiselno, da si ga ogledamo podrobneje. Zapisali smo

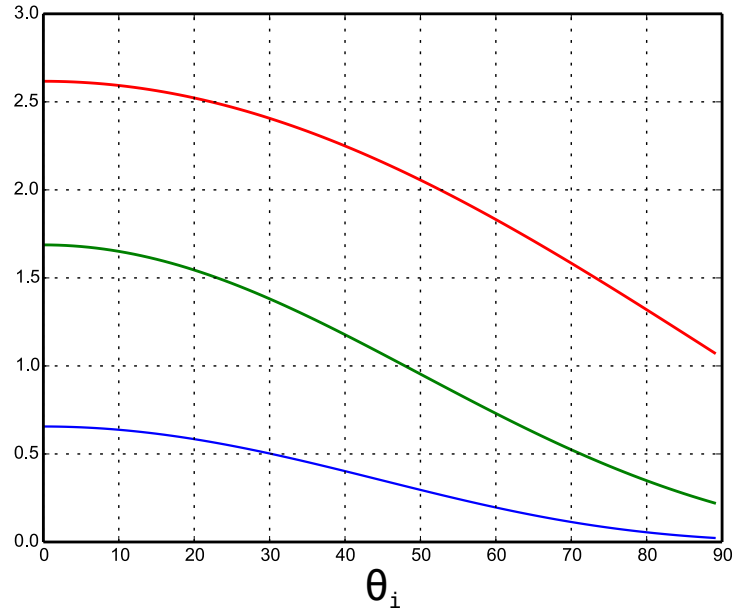
$$f(\omega_i, \omega_o) \propto (\omega_h \cdot \omega_n)^m = (\cos \theta_h)^m$$

Na grafu 4.6 je prikazana odbojnost $\rho(\omega_i)$ modela Blinn-Phong za tri različne vrednosti eksponenta m v odvisnosti od vpadnega kota θ_i . Ker imamo opravka z izotropičnim modelom, ϕ_i ni pomemben. Krivulje smo izračunali numerično.

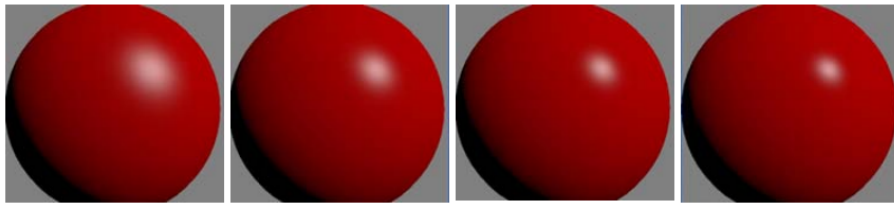
Opazimo lahko, da odbojnost za vpadne smeri blizu normale in za nizke vrednosti m presega 1, torej tak model lahko oddaja več energije kot je prejme! Poleg tega višji eksponent pomeni manjšo odbojnost površine. Če torej želimo poiskati fizikalno interpretacijo eksponenta, ugotovimo, da eksponent vpliva na dve stvari: na hrapavost (oziroma sijajnost) površine, kar je običajno naš namen pri nastavljanju tega parametra, kot stranski efekt pa spreminja tudi odbojnost.

Razlog za spreminjanje odbojnosti je v ožanju zrcalnega lobusa z višanjem m (maksimalna vrednost pa ostaja 1). Odbojnost je namreč samo s kosinusom utežen volumen lobusa.

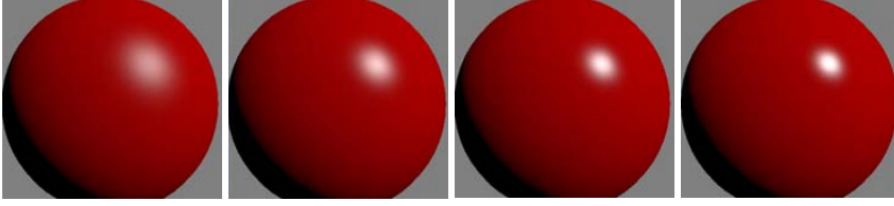
Dvojni pomen eksponenta nezaželen [1]. Na seriji slike 4.7 zvišujemo eksponent. Blesk (angl. *highlight*) postaja ožji, vendar ostaja enako svetel. Pričakovali bi svetlejši blesk, ker se odbita svetloba manj razprši kot na



Slika 4.6: Usmerjena hemisferična odbojnost (nima enote) ne-normaliziranega modela Blinn-Phong. Eksponent m je enak 2 (rdeča), 8 (zelena) in 32 (modra).



Slika 4.7: Klasičen Blinn-Phong (skupaj z Lambertovo razpršilno komponento). Eksponent m se zvišuje od leve proti desni: 25, 50, 75, 100 (z višanjem eksponenta želimo simulirati gladkejšo površino). Blesk se ozža, vendar ostane enako svetel. Posledično se zdi, da površina postaja manj sijajna. Vir [1].



Slika 4.8: Normaliziran Blinn-Phong. Z višanjem eksponenta blesk postaja ožji in hkrati svetlejši.

hrpavi površini. Izgubo bleska bi lahko nadomestili s povečanjem faktorja k_s , ki se običajno pojavlja v implementacijah (kot $k_s (\cos \theta_h)^m$). Vendar bi morali popravljati k_s za vsak eksponent, kar je neintuitivno in posledično zamudno.

Pri *normalizaciji* BRDF delimo z maksimalno odbojnostjo $\rho(\omega)$. V primeru modela Blinn-Phong lahko izpeljemo [12, 34] normalizirano verzijo

$$f(\omega_i, \omega_o) = \frac{1}{\max_{\omega \in \Omega} \rho(\omega)} k_s (\cos \theta_h)^m$$

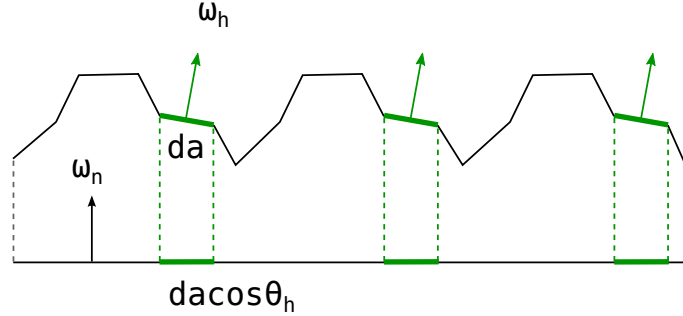
$$f(\omega_i, \omega_o) = \frac{(m+2)(m+4)}{8\pi(2^{-m/2} + m)} k_s (\cos \theta_h)^m$$

Hoffman [1] predlaga normalizacijski faktor, ki je nekoliko večji od točnega, vendar računsko enostavnejši:

$$\boxed{f(\omega_i, \omega_o) = \frac{m+8}{8\pi} k_s (\cos \theta_h)^m} \quad (4.8)$$

Usmerjena hemisferična odbojnost popravljenega modela doseže maksimalno vrednost k_s (maksimum je dosežen, kadar $\omega = \omega_n$). Faktor k_s ima tako sedaj fizikalno interpretacijo, kar nam lahko olajša izbiro vrednosti (maksimalna odbojnost je povezana z F_0 [1]). V kolikor zagotovimo $k_s \leq 1$ (lahko RGB), model ohranja energijo.

Kar je še pomembneje, eksponent sedaj določa samo hrapavost (slika 4.8). Višji eksponent daje ožji in hkrati svetlejši blesk, kar je pravilno. Parameter k_s je sedaj neodvisen.



Slika 4.9: Projekcija mikropovršinskih elementov na makropovršino.

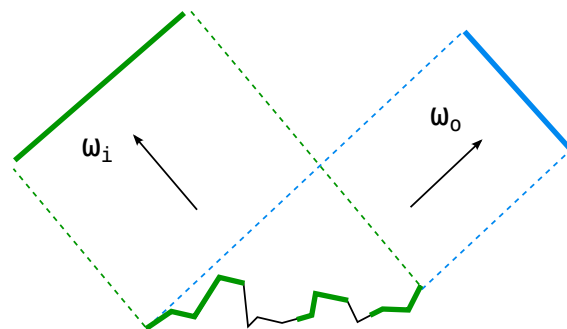
4.6 Splošni mikropovršinski BRDF

Moderni fizikalno osnovani BRDF so skoraj izključno izpeljani v okviru teorije mikropovršin. Kot smo zapisali pri izpeljavi Torrance-Sparrow modela, ti modeli zamenjajo zapleteno mikropovršino s poenostavljeno makropovršino, mikropovršinski odboj svetlobe pa je vključen v BRDF makropovršine. Pri tem predpostavljamo, da so značilnosti na mikropovršini premajhne, da bi jih lahko neposredno videli, vendar hkrati dovolj velike, da lahko uporabimo geometrijsko optiko in zanemarimo valovne pojave svetlobe. Večina modelov zanemari tudi večkratne odboje.

Mikropovršinski BRDF imajo obliko

$$f(\omega_i, \omega_o) = \frac{D(\omega_h) G(\omega_i, \omega_o, \omega_h) F(\theta_d)}{4 \cos \theta_i \cos \theta_o} \quad (4.9)$$

Oglejmo si posamezne komponente. Komponenta D (oziroma NDF, angl. *normal distribution function*) je statističen opis mikropovršine. Laično povedano, $D(\omega_h)$ podaja relativno verjetnost, da je mikropovršinski element usmerjen v smer ω_h . Skupaj elementi z normalo ω_h sestavljajo del mikropovršine, ki ima možnost odbiti vpadno svetlobo iz smeri ω_i v smer ω_o (predpostavljamo idealna zrcala), če seveda svetloba ne zadane ob druge dele mikropovršine (je senčena ali maskirana) ali prodre pod površino (določa F).



Slika 4.10: Osvetljena površina.



Slika 4.11: Primeri mikropovršin, ki kršijo predpostavke. Levo: mikropovršina ni relief. Desno: usmerjenost mikropovršinskega elementa ni neodvisna od verjetnosti senčenja/maskiranja.

D si lahko predstavljamo kot histogram mikropovršinskih normal - ima večje vrednosti v smereh, kamor je obrnjenih več elementov. Večina površin ima D z vrhom v $D(\omega_n)$, ker je precejšen del elementov usmerjen približno enako kot makrogeometrija. D je edina komponenta mikropovršinskega BRDF z enoto: sr^{-1} . Izpolnjevati mora naslednje pogoje:

$$0 \leq D(\omega_h) < \infty \quad (4.10)$$

kar je pogoj za porazdelitveno funkcijo (kot pri klasičnih porazdelitvah zveznih slučajnih spremenljivk).

Veljati mora tudi, da je projicirana površina mikropovršine enaka površini makropovršine:

$$\int_{\Omega} D(\omega_h) \cos \theta_h d\omega_h = 1 \quad (4.11)$$

Ilustracija 4.9 pojasnjuje pogoj. Če ima nek specifičen element z normalo ω_h površino da , potem je površina njegove projekcije na makropovršino enaka $da(\omega_h \cdot \omega_n) = da \cos \theta_h$. Enostavneje, pogoj zahteva, da je mikropovršina relief, brez lukenj ali prekrivanj (slika 4.11 levo).

Komponenta D je tipično vizualno najpomembnejša. Določa velikost, svetlost in obliko zrcalnega odboja (bleska). Več o specifičnih D kasneje.

Geometrijski faktor $G(\omega_i, \omega_o, \omega_h)$ predstavlja delež mikropovršine z normalo ω_h , ki je viden tako v smeri ω_i kot v smeri ω_o . Na ilustraciji 4.10 je na mikropovršini označen delež, viden iz smeri ω_o (zelena). Preostali delež je v senci. Del površine, ki lahko zrcali vpadno svetlobo, mora torej biti osvetljen, imeti ustrezno normalo (ω_h) in hkrati biti viden za opazovalca. Produkt D in G določa ta del površine. Za geometrijski faktor velja:

$$0 \leq G(\omega_i, \omega_o, \omega_h) \leq 1 \quad (4.12)$$

in simetričnost

$$G(\omega_i, \omega_o, \omega_h) = G(\omega_o, \omega_i, \omega_h) \quad (4.13)$$

Geometrijski faktor ima tipično relativno malo vpliva na celoten BRDF, razen za položne kote, kjer je senčenje/maskiranje izrazitejše. Vendar je

nujno potreben, da model ohranja energijo. G je odvisen od porazdelitvene komponente D in od podrobnosti mikropovršine (D sama ne določa mikropovršine unikatno), zato so točni izrazi redki. Večinoma uporabljamo poenostavljene oblike mikropovršin (kot na primer Torrance-Sparrow) oziroma se omejimo na določene predpostavke.

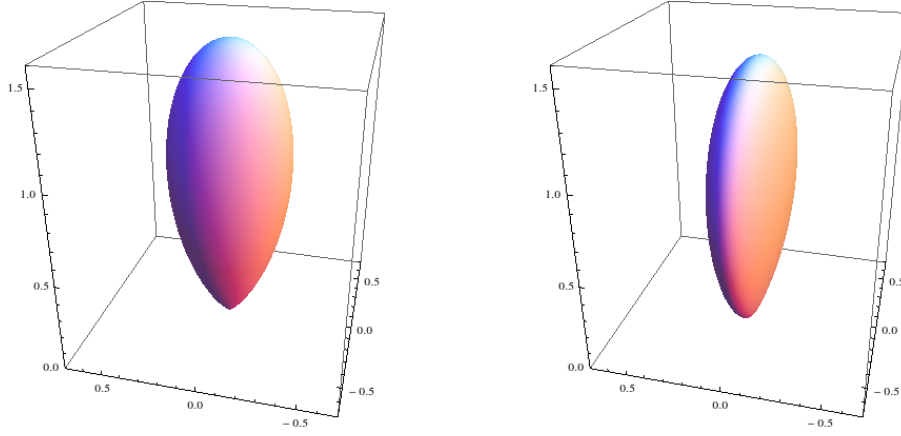
Ena izmed predpostavk je neodvisnost usmeritve mikropovršinskih elementov in verjetnosti, da bodo senčeni ali maskirani (angl. *normal/masking independence*). S to predpostavko mislimo na dejstvo, da je lahko nek element senčen/maskiran zaradi drugega dela mikropovršine, tudi če je relativno daleč stran. Kako je posamezen element usmerjen, običajno nima vpliva na verjetnost, da bo zaradi nekega dela mikropovršine zakrit, zato je smiselno, da ločimo D in G . Predpostavka je dobra v primeru naključnih mikropovršin (kjer so odsotne strukture). Ashikhmin in drugi [4] so poudarili, da predpostavka ne drži na površinah s ponavljajočimi se vzorci ali strukturami, kot na primer površina tkanine. Ilustracijski primer na sliki 4.11 desno. Elementi, usmerjeni približno tangentno s površino, bodo skoraj vedno v senci, medtem ko bodo elementi na vrhu skoraj vedno vidni. Torej usmerjenost elementa dobro napove verjetnost senčenja/maskiranja.

O Fresnelovi komponenti F smo že govorili. Medtem, ko produkt D in G določa aktivni del mikropovršine (osvetljen, viden in primerno usmerjen), F določa delež odbite svetlobe s tega dela mikropovršine (med 0 in 1, preostali del prodre pod površino). Je edina spektralna komponenta v mikropovršinskem BRDF in zato tipično RGB. V računalniški grafiki se skoraj univerzalno poslužujemo Schlickove aproksimacije.

V nadaljevanju se bomo podrobneje posvetili izbiri posameznih komponent D in G .

4.6.1 Komponenta D

V literaturi najdemo številne porazdelitve D , izpostavili bomo samo nekaj najpomembnejših. Blinn [5] je model, ki ga danes poznamo pod imenom Blinn-Phong, pravzaprav predlagal v okviru teorije mikropovršin. Na-



Slika 4.12: Blinn-Phong in Ashikhmin-Shirley porazdelitev mikronormal. Eksponenti $m = 8$ in $m_x = 20$, $m_y = 2$.

tančneje, predlagal je porazdelitev normal D, ki je posnemala starejši Phongov model. Iz pogoja 4.11 lahko izpeljemo

$$D(\omega_h) \propto (\cos \theta_h)^m$$

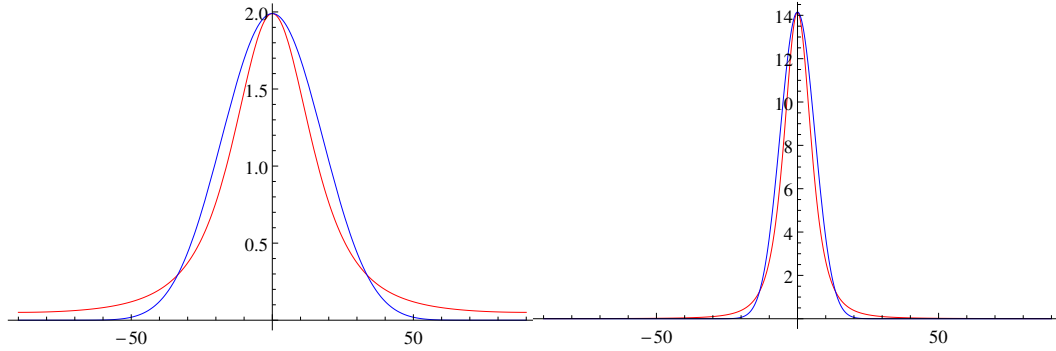
$$\int_{\Omega} (\cos \theta_h)^m (\omega_h \cdot \omega_n) d\omega_h = \frac{2\pi}{m+2}$$

$$D(\omega_h) = \frac{m+2}{2\pi} (\cos \theta_h)^m$$

Poudarimo, da je to drugačna normalizacija od tiste, ki smo jo opravili pri klasičnem Blinn-Phongu, kjer smo normalizirali celoten BRDF (s ciljem ohranitve energije). Faktor $(m+2)/2\pi$ v tem primeru samo zagotavlja, da D izpolnjuje pogoje iz definicije.

Funkciji $(\cos \theta_h)^m$ je Blinn na ta način vsilil specifičen fizikalni pomen: relativno verjetnost, da najdemo mikropovršinski element z neko usmeritvijo. Ali se ta porazdelitev ujema z resničnimi površinami? Izkaže se, da je zelo podobna Beckmannovi porazdelitvi [39], ki se široko uporablja v optiki. Walter in drugi [39] pripisujejo ravno temu dejstvu zaslugo, da je empirični Blinn-Phong še vedno v široki uporabi.

Ashikhmin in Shirley [3] predlagata anizotropno nadgradnjo Blinn-Phong



Slika 4.13: Primerjava Blinn-Phong (modra) in Trowbridge-Reitz (rdeča) porazdelitve. Levo: $m = 10.5$, $m_t = 0.4$ (hrapava površina). Desno: $m = 86.9$, $m_t = 0.15$ (gladkejša površina). Parametra sta izbrana tako, da sta vrednosti porazdelitev za $\theta_h = 0$ enaki ($m = 2m_t^{-2} - 2$).

porazdelitve:

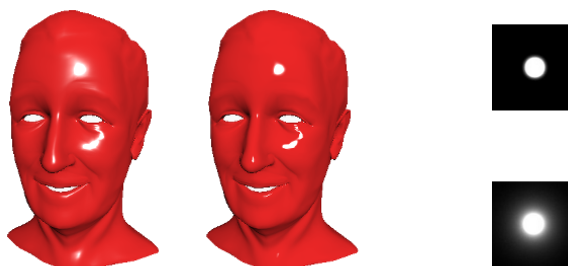
$$D(\omega_h) = \frac{\sqrt{(m_x + 2)(m_y + 2)}}{2\pi} (\cos \theta_h)^{m_x \cos^2 \phi_h + m_y \sin^2 \phi_h} \quad (4.14)$$

Primerjava na grafih 4.12. Grafa sta izdelana z raztezanjem hemisfere (vsaka smer ω v hemisferi je pomnožena z $D(\omega)$). Najnižja točka predstavlja smeri v ravnini površine (pravokotne normalni), najvišja točka predstavlja ω_n . Obe porazdelitvi imata največjo vrednost v smeri makronormale, kot je običajno. Vendar je Ashikhmin-Shirley sploščena - več mikropovršinskih elementov je usmerjenih vzdolž neke tangentne smeri (ϕ_h je kot med projekcijo ω_h na ravnino površine in izbrano tangento), kar ustreza na primer površinam z vzdolžnimi urezi. Kadar velja $m_x = m_y$, dobimo Blinn-Phong porazdelitev.

Med zelo popularnimi [17, 6] porazdelitvami je tudi Trowbridge-Reitz (Walter in drugi [39] jo imenujejo GGX), ki jo je prav tako predlagal že Blinn [5]:

$$D(\omega_h) = \frac{m_t^2}{\pi((\cos \theta_h)^2(m_t^2 - 1) + 1)^2} \quad (4.15)$$

Trowbridge-Reitz je izotropična (funkcija samo kota θ_h), tako kot Blinn-Phong. Primerjamo ju na grafih 4.13. Parameter m_t določa hrapavost, vendar visoke vrednosti pomenijo hrapave površine in nizke vrednosti gladkejša



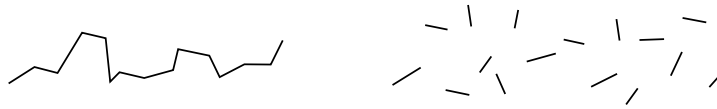
Slika 4.14: Primerjava izgleda zrcalnega odboja Trowbridge-Reitz in Blinn-Phong porazdelitve. Spletna demonstracija je na voljo na <http://matejd.github.io/micro-comp/>.

(ravno nasprotno kot pri porazdelitvi Blinn-Phong). Za razliko od parametra m ima m_t fizikalen pomen [15] (smiselne vrednosti tega parametra so med 0 in 1). Kot je mogoče opaziti na grafih, ima Trowbridge-Reitz ožji vrh in daljši rep kot Blinn-Phong (vrednosti najprej padajo hitreje, potem pa počasneje). Razlika je majhna, vendar se Trowbridge-Reitz bolje ujema z eksperimentalnimi podatki [6] in daje blesku zaželen izgled [17]. Primerjava na sliki 4.14.

Blinn je priporočal Trowbridge-Reitz porazdelitev pred Blinn-Phongovo zaradi eksperimentalne utemeljenosti in tudi, ker je bila računsko cenejša. V desetletjih po izidu članka so se računski stroji spremenili, danes je Trowbridge-Reitz nekoliko dražja [17]. Bralcu priporočamo Hoffmanovo primerjavo še številnih drugih porazdelitev [15].

4.6.2 Komponenta G

Do sedaj smo senčenje in maskiranje v geometrijskem faktorju obravnavali skupaj. Smiselno je, da opazimo, da sta pravzaprav ista stvar. Še enkrat si oglejmo ilustracijo 4.10. Za del mikropovršine, ki je viden iz vpadne smeri ω_i , pravimo, da ni v senci. Podobno za del, ki je viden iz smeri ω_o , pravimo, da ni maskiran. Razlika je samo v terminologiji. Govorimo lahko o funkciji



Slika 4.15: Mikropovršina. Predpostavka o neodvisnosti je manj realistična, implicira naključen oblak elementov.

maskiranja (angl. *masking function*), ki nam daje delež mikropovršine z normalo ω_h , viden iz smeri ω :

$$G_1(\omega, \omega_h)$$

Izkaže se, da lahko, če predpostavimo neodvisnost mikronormal in verjetnosti maskiranja G_1 (predpostavko smo obravnavali nekaj odstavkov višje), funkcijo maskiranja povsem določimo iz porazdelitve D! Smith (1967) je prvi izpeljal G_1 za Beckmannovo porazdelitev, obstajajo pa razširitve za poljubne porazdelitve. Primere izpeljave je mogoče najti v [39, 14].

Sprva se zdi možnost eksaktnega izračuna deleža vidne mikropovršine nenavadna. Razlog, da je to mogoče, je v naši statistični obravnavi površin, ki je samo aproksimacija. Pravzaprav je mikropovršina v naši predpostavki o neodvisnosti mikronormal in maskiranja bolj podobna naključnemu oblaku mikropovršinskih elementov [14] (slika 4.15) kot zvezni površini.

Ob še eni predpostavki lahko geometrijski faktor sedaj zapišemo kot

$$G(\omega_i, \omega_o, \omega_h) \approx G_1(\omega_i, \omega_h) G_1(\omega_o, \omega_h)$$

Efektivno predpostavljamo neodvisnost senčenja in maskiranja (angl. *separable masking/shadowing*). Z drugimi besedami, predpostavljamo, da je vidljivost v neki smeri neodvisna od vidljivosti v neki drugi smeri. Primer, kjer predpostavka očitno ne drži, je $\omega_i = \omega_o$. Takrat so elementi, vidni za opazovalca, hkrati vidni tudi za vir svetlobe, zato maskiranje zmotno upoštevamo dvakrat.

Kot primer, Walter [39] navaja G_1 , izračunan za Trowbridge-Reitz porazdelitev:

$$G_1(\omega, \omega_h) = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + m_t^2 \tan(\theta)^2}} \quad (4.16)$$

kjer je θ kot med ω in makronormalo ω_n .

Geometrijski faktor kot produkt funkcij maskiranja je priporočen, kadar je cilj natančnost [15]. Za igre so na voljo učinkovite aproksimacije [18]. Kadar so tudi te aproksimacije predrage, lahko posežemo po Cook-Torrance geometrijskem faktorju, ki smo ga že obravnavali pri izpeljavi mikropovršinskega modela. Kelemen in drugi [19] predlagajo še cenejši približek tega geometrijskega faktorja

$$G(\omega_i, \omega_o, \omega_h) = \frac{2 \cos \theta_i \cos \theta_o}{1 + (\omega_i \cdot \omega_o)}$$

Števec se v končnem mikropovršinskem BRDF krajša, ostane samo deljenje.

Poglavje 5

Implementacije

V procesu upodabljanja je naš cilj izračun senčilne enačbe

$$L_o(\omega_o) = \int_{\Omega} f(\omega_i, \omega_o) L_i(\omega_i) \cos \theta_i d\omega_i \quad (5.1)$$

za vsak žarek $(-\omega_o)$ iz naše virtualne kamere. Radianca $L_i(\omega_i)$, ki osvetljuje površino, je rezultat ne samo virov svetlobe, temveč tudi odbojev svetlobe z drugih objektov v prostoru. Globalno osvetljevanje ni predmet obravnave v tej nalogi, zanimala nas bo samo lokalna različica - predpostavili bomo, da imamo $L_i(\omega_i)$ na voljo.

V tem poglavju bomo raziskali načine, kako izračunati senčilno enačbo. Obravnavali bomo posebne primere virov svetlobe, kjer se izračun poenostavi. Nato se bomo lotili aproksimacije, ki omogoča poljubno natančen izračun (ob zadostnih računskih virih) ter njeno različico, ki je namenjena interaktivnim aplikacijam. Specifično bomo obravnavali uporabo mikropovršinskih BRDF v tej aproksimaciji.

5.1 Svetila

Najprej si oglejmo posebne primere *direktne* osvetlitve. V mislih imamo osvetlitve neposredno iz vira svetlobe.



Slika 5.1: Točkasta aproksimacija. Integral po prostorskemu kotu smeri nadomestimo z izračunom v eni sami smeri.

5.1.1 Točkasta svetila

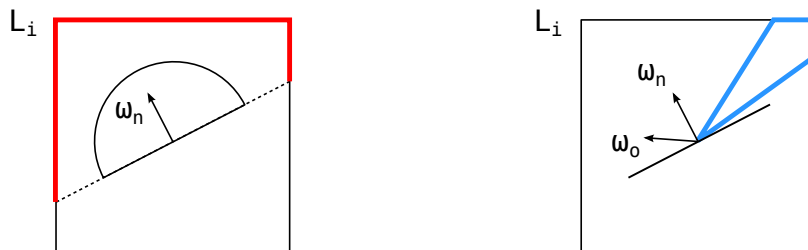
Vsi resnični viri svetlobe imajo površino. V računalniški grafiki dajemo simulaciji takšnih virov posebno ime (angl. *area light*), da jih ločimo od siceršnjih točkastih aproksimacij (angl. *punctual light*).

Točkasto aproksimacijo lahko formaliziramo z naslednjim zapisom:

$$L_o(\omega_o) = \int_{\mathcal{C}} f(\omega_i, \omega_o) L_i(\omega_i) \cos \theta_i d\omega_i \approx f(\omega_l, \omega_o) E_{\perp} \cos \theta_l \quad (5.2)$$

kjer je E_{\perp} obsevanost, merjena v ravnini, pravokotni na smer ω_l (slika 5.1). Izračun integrala v smereh znotraj prostorskega kota svetila \mathcal{C} smo nadomestili z izračunom produkta med BRDF v eni sami smeri in obsevanostjo. Izračun v eni sami smeri je seveda računsko veliko cenejši. Predpostavili smo, da se BRDF znotraj obravnavanega prostorskega kota ne spreminja močno (Lambertov model je primer, kjer je konstanten). To je dobra predpostavka, kadar je prostorski kot majhen. Predpostavka je dobra tudi za hrapave površine, kjer se BRDF spreminja počasi in nima izrazitega vrha. Po drugi strani so napake opazne na visoko sijajnih površinah, ker dobro zrcalijo vir svetlobe - oblika in velikost vira sta vidna. Odboj v točkasti aproksimaciji je na takšnih površinah nerealistično majhen.

Vire svetlobe s površino lahko v splošnem simuliramo s podobno tehniko,



Slika 5.2: Levo: mapa obsevanosti, shema območja v kubični mapi okolja, ki prispeva k obsevanosti za specifično normalo. Desno: filtriranje mape okolja.

kot je predstavljena v naslednji sekciji. V okviru interaktivne računalniške grafike je problem še vedno precej nerešen. Obstaja nekaj aproksimacij [17].

5.2 Tehnike IBL

V okviru tehnik IBL (angl. *image-based lighting*) vpadno radianco $L_i(\omega_i)$ oziroma sorodne kvantitete hranimo v mapah okolja (angl. *environment maps*).

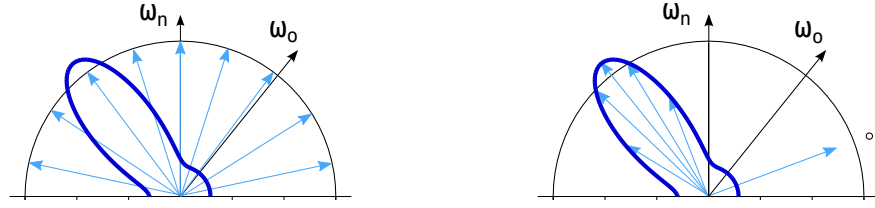
Mape okolja lahko uporabimo neposredno za idealna zrcala. V primeru takšnih površin je dovolj izračunati zrcalni vektor pogleda ω_r , senčilna enačba pa se poenostavi v $L_o(\omega_o) = F(\theta_o) L_i(\omega_r)$.

5.2.1 Filtrirane mape okolja

V primeru Lambertovega modela lahko opazimo

$$L_o(\omega_o) = \frac{k_d}{\pi} \int_{\Omega} L_i(\omega_i) (\omega_i \cdot \omega_n) d\omega_i = \frac{k_d}{\pi} E(\omega_n) \quad (5.3)$$

kjer z $E(\omega_n)$ poudarjamo, da je obsevanost izračunana v ravnini, pravokotni na geometrijsko normalo. Odhodna radianca je enaka za vse smeri ω_o in torej povsem določena z normalo. Podobno kot pri mapah okolja lahko v



Slika 5.3: Monte Carlo aproksimacija integrala. Oceno lahko izboljšamo, če vzorčimo po pomembnosti.

mape obsevanosti (angl. *irradiance environment map*) tako shranimo vnaprej izračunano obsevanost $E(\omega_n)$ za vse normale ω_n (slika 5.2). Obsevanost je mogoče shraniti v še kompaktnejši obliki kot koeficiente sferičnih harmonikov [31].

V splošnem je odhodna radianca odvisna tudi od smeri pogleda ω_o - če bi želeli senčilno enačbo izračunati vnaprej za vse ω_o in ω_n , bi potrebovali vsaj 4D mapo! V igrah se zato uporabljajo filtrirane mape okolja (angl. *filtered environment maps*), kjer lahko z nekaterimi grobimi aproksimacijami izračun poenostavimo v en sam vpogled v takšno mapo. Podrobnejšo obravnavo aproksimacij, izdelave in uporabe filtriranih map je mogoče najti na [21].

5.2.2 Vzorčenje po pomembnosti

Kratka ponovitev slučajnih spremenljivk in Monte Carlo aproksimacije je na voljo v dodatku.

Senčilni integral lahko aproksimiramo z Monte Carlo metodo. Izberemo n naključnih smeri $\omega_j \in \Omega$ in izračunamo

$$\begin{aligned}
 L_o(\omega_o) &= \int_{\Omega} f(\omega_i, \omega_o) L_i(\omega_i) \cos \theta_i d\omega_i \\
 &\approx 2\pi \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(\omega_j, \omega_o) L_i(\omega_j) \cos \theta_j
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

kjer si lahko vsoto, deljeno z n , predstavljamo kot približek povprečne vre-

dnosti integranda, 2π pa je površina hemisfere. V limiti $n \rightarrow \infty$ ocena konvergira k točni vrednosti. Na žalost v tej naivni obliki potrebujemo veliko število vzorcev (vzorčenje je izbira naključnih smeri ω_j) za dobro oceno. Težava je v obliki integranda, ki ima lahko visoke vrednosti v okolici zrcalne smeri ω_r in v smereh proti virom svetlobe, sicer pa ima dokaj nizke vrednosti (slika 5.3). Vzorci v povsem naključno izbranih smereh te pomembne smeri večinoma zgrešijo, kar pomeni, da ocena podcenjuje integral. Napaka je še posebno velika na gladkih površinah.

Zapisana aproksimacija je samo poseben primer, v splošnem je Monte Carlo cenilka enaka

$$L_o(\omega_o) \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{f(\omega_j, \omega_o) L_i(\omega_j) \cos \theta_j}{p(\omega_j)} \quad (5.5)$$

V primeru zgoraj smo smeri izbirali *enakomerno* naključno po hemisferi, kar pomeni, da je bila gostota verjetnosti enaka

$$p(\omega_j) = \frac{1}{\int_{\Omega} d\omega} = \frac{1}{2\pi} \quad (5.6)$$

Izkaže se, da lahko smeri izbiramo pametneje. Tehnika se imenuje vzorčenje po pomembnosti (angl. *importance sampling*). Glavna ideja je v izbiri gostote $p(\omega_j)$, ki ustreza integrandu. Želimo več vzorcev, kjer je vrednost integranda velika. Izkaže se, da lahko izberemo gostoto, *podobno* integrandu. Za gostoto lahko vzamemo njegovo aproksimacijo ali pa iz integranda odstranimo kakšen del. V primeru senčilnega integrala ocenjujemo produkt med BRDF, vpadno radianco in faktorjem $\cos \theta_i$. Tipično izberemo gostoto sorazmerno z samo BRDF ali samo L_i [8], ker vzorčenje produkta v splošnem ni trivialno.

5.2.3 Primeri vzorčenja po pomembnosti

Najprej si za ilustracijo oglejmo, kako izbiramo smeri enakomerno. Posledica Arhimedovega izreka [35] o enakosti površine sfere in njej očrtanega plašča valja je enostaven algoritem za enakomerno izbiro smeri na hemisferi: enakomerno izberemo naključno točko na plašču $[0, 1] \times [0, 2\pi]$ in poiščemo njeno

osno projekcijo na hemisfero. Naj bosta ξ_1 in ξ_2 enakomerno porazdeljeni naključni števili med 0 in 1. Potem lahko algoritem zapišemo kot

```
vec3 sampleHemisphereUniformly(float e1, float e2) {
    float r = sqrt(1.f - e1*e1);
    float phi = e2 * TwoPI;
    return vec3(r * cos(phi),
                r * sin(phi),
                e1);
}
```

Funkcija vrne vektor v lokalnem prostoru (normala je os z), kar pomeni, da ga moramo potem še ustrezno transformirati. Predstavljen algoritem je samo ena izmed številnih možnosti za enakomerno izbiro smeri.

V splošnem nas zanima, kako izbirati naključne smeri v skladu s podano funkcijo gostote $p(\omega_j)$. To nam v primeru enostavnejših gostot omogoča inverzna transformacija (angl. *inverse transform sampling*). Z inverzno transformacijo lahko pridobimo predpis za izbiro vzorčnih smeri iz para enakomerno porazdeljenih naključnih spremenljivk ξ_1 in ξ_2 . Primer, enakomerni izbiri smeri (algoritmu zgoraj) ustreza predpis [29]:

$$\begin{aligned}\theta &= \cos^{-1}(\xi_1) \\ \phi &= 2\pi\xi_2\end{aligned}\tag{5.7}$$

Sferična kota θ in ϕ predstavljata smer v lokalnem prostoru.

Nadaljujmo z vzorčenjem smeri v Phongovem BRDF $(\omega_i \cdot \omega_r)^m$. To je, želimo smeri, ki so blizu smeri ω_r . Brez škode za splošnost lahko predpostavimo $\omega_r = (0, 0, 1)$, kar pomeni, da je željena gostota verjetnosti

$$\begin{aligned}p(\omega) &\propto (\cos \theta)^m \\ p(\omega) &= \frac{m+1}{2\pi} (\cos \theta)^m\end{aligned}\tag{5.8}$$

zaradi pogoja, da je integral gostote čez domeno enak 1. Iz te gostote lahko potem z inverzno transformacijo izpeljemo predpis [7]:

$$\begin{aligned}\theta &= \cos^{-1}(\xi_1^{\frac{1}{m+1}}) \\ \phi &= 2\pi\xi_2\end{aligned}\tag{5.9}$$

Ker smo smer generirali v lokalnem prostoru okoli osi z , jo moramo še rotirati do zrcalne smeri ω_r .

5.2.4 Vzorčenje mikropovršinskih BRDF

Podobne formule lahko izpeljemo tudi za mikropovršinske BRDF [39, 8]. Želimo izbirati smeri sorazmerno z $f(\omega_i, \omega_o) \cos \theta_i$, vendar v splošnem tega ne moremo povsem točno. Namesto tega generiramo kompromisne vektorje ω_h s porazdelitvijo $p(\omega_h) = D(\omega_h) \cos \theta_h$, iz teh pa pridobimo vzorčne smeri ω_j z zrcaljenjem ω_o :

$$\omega_j = 2(\omega_h \cdot \omega_o) \omega_h - \omega_o\tag{5.10}$$

Komponenta D pogosto najbolj vpliva na obliko BRDF, zato je smiselno, da izbiramo smeri sorazmerno ravno s to komponento. Zaradi transformacije vzorčne smeri niso porazdeljene enako kot kompromisni vektorji, vendar velja

$$p(\omega_j) = \frac{p(\omega_h)}{4(\omega_h \cdot \omega_j)}\tag{5.11}$$

Če to nesemo nazaj v Monte Carlo cenilko senčilnega integrala (enačba 5.5) in poenostavimo izraz, nam ostane

$$L_o(\omega_o) \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{L_i(\omega_j) G(\omega_j, \omega_o, \omega_h) F(\theta_d) \cos \theta_d}{\cos \theta_o \cos \theta_h}\tag{5.12}$$

V neoptimizirani implementaciji bi aproksimacija izgledala nekako takole

```
vec2 e1e2[42];
int numSamples = 42;
vec3 specular = vec3(0.0);
```

```

for (int j = 0; j < numSamples; j++) {
    vec3 wh = importanceSampleWh(e1e2[j]);
    vec3 wj = 2.0*dot(wh,wo)*wh - wo;
    if (dot(wn, wj) > 0.0) {
        vec3 L = lookupLi(wj, wn, wh);
        vec3 F = evaluateF(dot(wh, wj));
        float G = evaluateG(wj, wo, wh);
        specular += L * G * F * dot(wh, wj) /
                    (dot(wn, wo) * dot(wn, wh));
    }
}
specular /= numSamples;

```

Lahko se zgodi, da je izbrana vzorčna smer ω_j pod ravnino površine. V tem primeru je BRDF enak 0. Funkcije `importanceSampleWh`, `evaluateF` in `evaluateG` so odvisne od izbranih komponent mikropovršinskega modela. Funkcija `lookupLi` vrne radianco iz mape okolja. Pomembno je seveda, da so vsi vektorji v istem prostoru.

Za primer vzorčenja porazdelitve mikronormal vzemimo Trowbridge-Reitz porazdelitev. Enačbi za izračun ω_h sta podani v [39]:

$$\begin{aligned}\theta &= \tan^{-1} \left(\frac{m_t \sqrt{\xi_1}}{\sqrt{1 - \xi_1}} \right) \\ \phi &= 2\pi \xi_2\end{aligned}\tag{5.13}$$

Izpostavimo, da je predpis odvisen od parametra hrapavosti m_t . Z uporabo trigonometričnih relacij

$$\cos(\tan^{-1} \theta) = \frac{1}{\sqrt{\theta^2 + 1}}, \quad \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1\tag{5.14}$$

lahko izračun vzorčne smeri poenostavimo v naslednji GLSL:

```

vec3 importanceSampleWh(vec2 e1e2) {
    float phi = TwoPI*e1e2.y;
    float cosTheta = sqrt((1.0-e1e2.x) /

```

```

        (e1e2.x*(mt*mt-1.0) + 1.0));
float sinTheta = sqrt(1.0 - cosTheta*cosTheta);
return vec3(sinTheta * cos(phi),
            sinTheta * sin(phi),
            cosTheta);
}

```

Poudarimo, da je Monte Carlo izračun senčilnega integrala povsem točen za poljuben BRDF ob zadostnem številu vzorcev. Dejstvo, da smo gostoto verjetnosti samo okvirno dobro sestavili, pomeni samo, da bomo potrebovali več vzorcev. Žal kljub vzorčenju po pomembnosti še vedno potrebujemo veliko (več 100 ali celo 1000) vpogledov v mapo okolja.

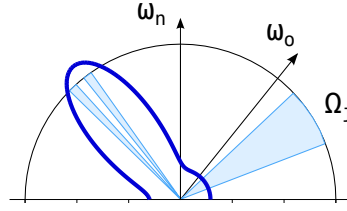
5.2.5 Filtrirano vzorčenje po pomembnosti

Uporaba premajhnega števila vzorcev v osnovnem vzorčenju po pomembnosti ima za posledico šum (angl. *noise*) in prekrivanje (angl. *aliasing*). Colbert in Křivánek [7, 20] predlagajo kombiniranje vzorčenja po pomembnosti s filtriranjem mape okolja (angl. *filtered importance sampling*). Vzorci iz filtrirane mape povprečijo večja območja in na ta način zadušijo šum in prekrivanje, podobno kot mipmap tehnika pri upodabljanju s teksturami (slika 5.6).

Smeri ω_j , kjer je gostota $p(\omega_j)$ manjša, izberemo redkeje, zato je smiselno, da vzorčimo približno povprečje okoli teh smeri namesto samo neposredne vrednosti v tej smeri. Kjer je gostota velika, bomo izbrali več smeri, zato bo tam aproksimacija dobra neposredno (slika 5.4). Idejo lahko izrazimo s prostorskim kotom, ki naj pripada vzorcu s specifično verjetnostjo:

$$\Omega_j(\omega_j) = \frac{1}{n p(\omega_j)} \quad (5.15)$$

kjer je n skupno število vzorcev, ki jih bomo naredili. Če vzorčimo enakomerno, potem vsakemu vzorcu pripada prostorski kot $2\pi/n$ (in vsem skupaj celotna hemisfera). Vzorcju priredimo povprečje znotraj tega prostorskega kota okoli vzorčne smeri.



Slika 5.4: Filtrirano vzorčenje po pomembnosti.

Colbert in Křivánek filtrirajo mapo okolja s povprečnim filtrom (angl. *box filter*) zaradi strojne podpore (mip nivoji tekstur). Vsak teksturni element mip nivoja je tako povprečje 4 elementov na nivoju nižje. Naj bo Ω_t prostorski kot teksturnega elementa na nivoju 0 (najvišja resolucija). Potem je mip nivo, ki najbolje ustreza vzorcu, enak $\log_4(\Omega_j(\omega_j)/\Omega_t)$.

Vzemimo za primer kubično mapo okolja z velikostjo stranice $w \times w$. Teksturni element v povprečju pokriva prostorski kot

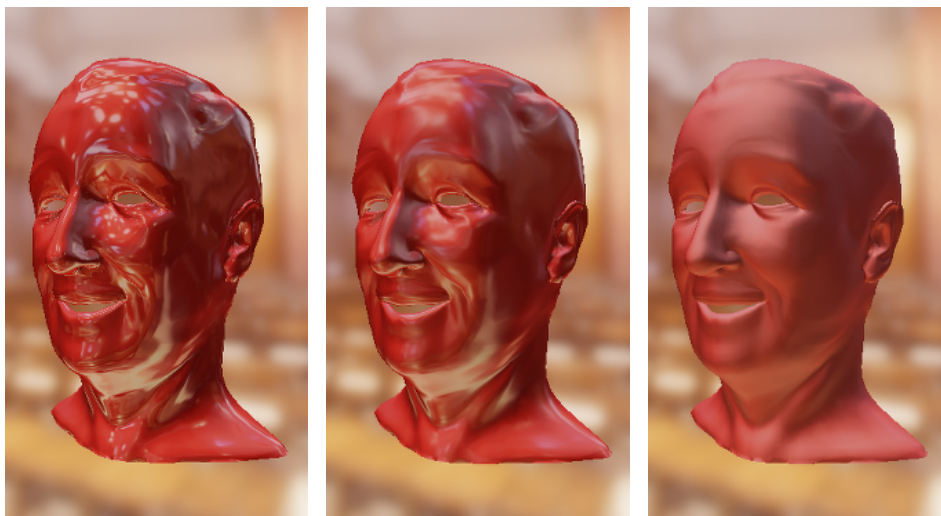
$$\Omega_t = \frac{4\pi}{6w^2} \quad (5.16)$$

Teksturni elementi blizu oglišč pokrivajo manjši, tisti na sredini stranic pa večji prostorski kot, vendar je popačenje relativno majhno. Izračun mip nivoja l se poenostavi v

$$l = \log_4 \left(\frac{6w^2}{np(\omega_j)4\pi} \right) = \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{6w^2}{n4\pi} \right) - \frac{1}{2} \log_2(p(\omega_j)) \quad (5.17)$$

Vpogled v mapo okolja `lookupLi` potem izgleda nekako takole (seveda lahko konstante izračunamo vnaprej in poenostavimo programsko kodo):

```
vec3 lookupLi(vec3 wj, vec3 wn, vec3 wh) {
    float p = evaluateD(wh) * dot(wh, wn) / (4.0 * dot(wh, wj));
    float l = max(0.0, 0.5*log2(6.0*w*w/(numSamples*4.0*PI)) -
                  0.5*log2(p));
    return textureCubeLod(filteredSampler, wj, l).rgb;
}
```



Slika 5.5: Primer implementacije filtriranega vzorčenja po pomembnosti. Mapo okolja smo filtrirali vnaprej na podoben način, kot je opisano na [21]. Uporabljen porazdelitev Trowbridge-Reitz, spreminjamo parameter hrupavosti. Spletna demonstracija je voljo na <http://matejd.github.io/filtered-is/>.

Avtorji članka predlagajo dodatek empiričnega faktorja k izračunu mip nivoja za vizualno sprejemljivejši rezultat. Število potrebnih pogledov v mapo okolja se s filtriranjem precej zmanjša. V primerih, kjer kompleksna geometrija nekoliko zakrije napake, avtorji dobijo željene rezultate z nekaj 10 vzorci. Razvijalci igre Reset [16] uporabljajo 32 vzorcev v kombinaciji s Phongovim filtriranjem mape okolja. Podrobnejša obravnavo teorije in analiza aproksimacij v ozadju filtriranega vzorčenja po pomembnosti je na voljo v [20].

Vzorčenje po pomembnosti in njene nadgradnje, n.pr. vzorčenje mape okolja (angl. *environment importance sampling*) in kombinirano vzorčenje (angl. *multiple importance sampling*) so zelo uporabljane v filmski industriji [8].



Slika 5.6: Levo: prekrivanje zaradi premajhnega števila vzorcev. Desno: napako zadušimo z ustreznim povprečenjem.

Poglavje 6

Zaključek

V nalogi smo raziskali matematično in fizikalno ozadje senčenja. Specifično smo se posvetili mikropovršinskim modelom, ki so najpogostejše uporabljani.

Omenili smo, da je prednost fizikalno osnovanih senčilnih modelov izboljšana produktivnost ustvarjalcev vsebin. Produktivnost je rezultat manjšega števila parametrov (v modelu), in dejstva, da so ti parametri omejeni na fizikalno smiselne vrednosti. Ravno ta omejenost omogoča konsistenten izgled materialov v različno osvetljenih okoljih.

Eden izmed parametrov, ki jih imamo v mislih, je Fresnelova odbojnost F_0 . Površine iz vseh snovi, če so le dovolj gladke, v položnih kotih postanejo podobne zrcalu. V preteklosti je bil pojav povečane odbojnosti dobro poznan, vendar je bil dodan materialom kot poseben primer. Parameter F_0 , po drugi strani, je vedno prisoten in njegova vrednost je točno določena z snovjo površine.

Druga redukcija parametrov sledi iz zahteve po ohranitvi energije. Hrapave površine bolj razpršijo vpadno svetlobo kot gladke, vendar je količina odbite svetlobe enaka. Tako je velikost bleska povezana z njegovo svetlostjo (poglavje o normalizaciji modela Blinn-Phong). Ohranitev energije diktira tudi povezanost površinskega in podpovršinskega odboja (model Ashikhmin-Shirley).

V produkciji iger je tako sedaj največ podrobnosti shranjenih v teksturah

hrapavosti, ki določajo variabilnost komponent D in G na površini. Nosijo informacijo o obrabljenosti površine in podobnem. Ostali parametri so določeni z snovjo in jih je mogoče vzeti iz pripravljenih tabel. V praksi se zaradi kreativne svobode in praktičnih omejitev fizikalna smiselnost lahko tudi nekoliko zanemari.

Seveda smo v nalogi izpustili mnogo tem, ki pridejo v upoštevek pri fizikalno osnovanem senčenju. Med te teme gotovo sodijo tudi praktične težave pri implementaciji teh modelov (n.pr. v kombinaciji z odloženim upodabljanjem) in spremembe v izdelavi vsebin. Bralcu, ki ga področje zanima, priporočamo zbirko povezav [2].

Literatura

- [1] T. Akenine-Möller, E. Haines, and N. Hoffman. *Real-Time Rendering 3rd Edition*. A. K. Peters, Ltd., Natick, MA, USA, 2008.
- [2] K. Anagnostou. Readings on physically-based rendering. <http://interplayoflight.wordpress.com/2013/12/30/readings-on-physically-based-rendering/>, 2013. Accessed: 2014-05-11.
- [3] M. Ashikhmin and P. Shirley. An anisotropic phong brdf model. *J. Graph. Tools*, 5(2):25–32, Feb. 2000.
- [4] M. Ashikmin, S. Premože, and P. Shirley. A microfacet-based brdf generator. In *Proceedings of the 27th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, SIGGRAPH '00, pages 65–74, New York, NY, USA, 2000. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co.
- [5] J. F. Blinn. Models of light reflection for computer synthesized pictures. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, 11(2):192–198, July 1977.
- [6] B. Burley. Physically-based shading at disney. <http://blog.selfshadow.com/publications/s2012-shading-course/>, 2012. Accessed: 2014-04-28.
- [7] M. Colbert and J. Krivanek. Gpu-based importance sampling. In H. Nguyen, editor, *GPU Gems 3*, pages 459–479. Addison-Wesley, 2007.

- [8] M. Colbert, S. Premože, and G. Francois. Importance sampling for production rendering. In *SIGGRAPH 2010 Course*, 2010.
- [9] R. L. Cook and K. E. Torrance. A reflectance model for computer graphics. *ACM Trans. Graph.*, 1(1):7–24, Jan. 1982.
- [10] Disney. Disney brdf explorer. <http://www.disneyanimation.com/technology/brdf.html>, 2012. Accessed: 2014-04-28.
- [11] R. Driscoll. Physically-based shading. <http://www.rorydriscoll.com/2013/11/22/physically-based-shading/>, 2013. Accessed: 2014-05-12.
- [12] F. Giesen. Phong normalization factor derivation. <http://www.farbrausch.de/~fg/stuff/phong.pdf>. Accessed: 2014-04-28.
- [13] Y. Gotanda. Beyond a simple physically based blinn-phong model in real-time. http://research.tri-ace.com/Data/s2012_beyond_CourseNotes.pdf, 2012. Accessed: 2014-04-28.
- [14] E. Heitz. Understanding the Masking-Shadowing Function in Microfacet-Based BRDFs. Research Report RR-8468, INRIA, Feb. 2014.
- [15] N. Hoffman. Physics and math of shading. <http://blog.selfshadow.com/publications/s2013-shading-course/>, 2013. Accessed: 2014-04-28.
- [16] M. Kallinen. In praxis: Surface shading. <http://reset-game.net/?p=196>, 2012. Accessed: 2014-04-30.
- [17] B. Karis. Real shading in unreal engine 4. http://blog.selfshadow.com/publications/s2013-shading-course/karis/s2013_pbs_epic_notes_v2.pdf, 2013. Accessed: 2014-04-28.
- [18] B. Karis. Specular brdf reference. <http://graphicrants.blogspot.com/2013/08/specular-brdf-reference.html>, 2013. Accessed: 2014-04-28.

-
- [19] C. Kelemen, L. Szirmay-Kalos, and L. Szirmay-kalos. A microfacet based coupled specular-matte brdf model with importance sampling, 2001.
 - [20] J. Krivánek and M. Colbert. Real-time shading with filtered importance sampling. *Computer Graphics Forum*, 27(4):1147–1154, 2008. Eurographics Symposium on Rendering, EGSR '08.
 - [21] S. Lagarde. Adopting a physically based shading model. <http://seblagarde.wordpress.com/2011/08/17/hello-world/>, 2011. Accessed: 2014-04-28.
 - [22] S. Lagarde. Feeding a physically based shading model. <http://seblagarde.wordpress.com/2011/08/17/feeding-a-physical-based-lighting-mode/>, 2011. Accessed: 2014-04-28.
 - [23] S. Lagarde. Relationship between phong and blinn lighting model. <http://seblagarde.wordpress.com/2012/03/29/relationship-between-phong-and-blinn-lighting-model/>, 2012. Accessed: 2014-04-28.
 - [24] R. R. Lewis. Making shaders more physically plausible. In *In Fourth Eurographics Workshop on Rendering*, pages 47–62, 1994.
 - [25] W. Matusik, H. Pfister, M. Brand, and L. McMillan. A data-driven reflectance model. *ACM Trans. Graph.*, 22(3):759–769, July 2003.
 - [26] A. Ngan, F. Durand, and W. Matusik. Experimental analysis of brdf models. In *Proceedings of the Eurographics Symposium on Rendering*, pages 117–226. Eurographics Association, 2005.
 - [27] F. Nicodemus and NBS. *Geometrical Considerations and Nomenclature for Reflectance*. NBS Monograph. U.S. Government Printing Office, 1977.

- [28] M. Oren and S. K. Nayar. Generalization of lambert's reflectance model. In *Proceedings of the 21st Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, SIGGRAPH '94, pages 239–246, New York, NY, USA, 1994. ACM.
- [29] M. Pharr and G. Humphreys. *Physically Based Rendering, Second Edition: From Theory To Implementation*. Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, USA, 2nd edition, 2010.
- [30] B. T. Phong. Illumination for computer generated pictures. *Commun. ACM*, 18(6):311–317, June 1975.
- [31] R. Ramamoorthi and P. Hanrahan. An efficient representation for irradiance environment maps. In *Proceedings of the 28th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, SIGGRAPH '01, pages 497–500, New York, NY, USA, 2001. ACM.
- [32] S. Rusinkiewicz. A new change of variables for efficient BRDF representation. In *Rendering Techniques (Proc. Eurographics Workshop on Rendering)*, June 1998.
- [33] C. Schlick. An inexpensive brdf model for physically-based rendering. *Comput. Graph. Forum*, pages 233–246, 1994.
- [34] C. Schüler. The blinn-phong normalization zoo. <http://www.thetenthplanet.de/archives/255>, 2011. Accessed: 2014-04-28.
- [35] M.-Z. Shao and N. Badler. Spherical sampling by archimedes' theorem. Technical report, University of Pennsylvania, 1996.
- [36] P. Shirley, B. Smits, H. Hu, and E. Lafortune. A practitioners' assessment of light reflection models. In *Proceedings of the 5th Pacific Conference on Computer Graphics and Applications*, PG '97, pages 40–, Washington, DC, USA, 1997. IEEE Computer Society.

-
- [37] K. E. Torrance and E. M. Sparrow. Theory for off-specular reflection from roughened surfaces. *J. Opt. Soc. Am.*, 57(9):1105–1112, Sept. 1967.
 - [38] E. Veach. *Robust Monte Carlo Methods for Light Transport Simulation*. PhD thesis, Stanford University, 1997.
 - [39] B. Walter, S. R. Marschner, H. Li, and K. E. Torrance. Microfacet models for refraction through rough surfaces. In *Proceedings of the 18th Eurographics Conference on Rendering Techniques*, EGSR’07, pages 195–206, Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland, 2007. Eurographics Association.
 - [40] A. Weidlich and A. Wilkie. Arbitrarily layered micro-facet surfaces. In *Proceedings of the 5th International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques in Australia and Southeast Asia*, GRAPHITE ’07, pages 171–178, New York, NY, USA, 2007. ACM.
 - [41] S. H. Westin, H. Li, and K. E. Torrance. A field guide to brdf models, 2004.

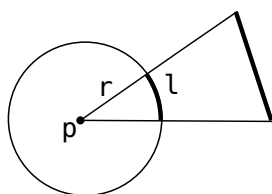
Dodatek A

Prostorski kot

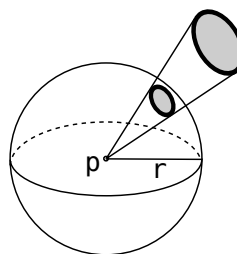
Pogosto želimo specifikirati, kako velik se objekt zdi opazovalcu na določeni lokaciji. Zanima nas matematična formulacija kota pogleda, velikosti stožca svetlobe (žaromet), velikosti vira svetlobe (kako velika izgleda žarnica z neke razdalje) in podobno. Potrebujemo torej mero kotne velikosti v 3D.

Poglejmo najprej primer v dveh dimenzijah (slika A.1). Kotno velikost objekta o iz točke p dobimo tako, da dolžino dela krožnice l (projekcija objekta na krožnico) delimo s polmerom krožnice r . Po definiciji je 1 radian kot, ki zajema lok krožnice z dolžino r . Maksimalen možen kot je tako 2π radianov.

Razširitev koncepta v 3D je neposredna: prostorski kot (angl. *solid angle*)



Slika A.1: Kotna velikost v 2D



Slika A.2: Prostorski kot

je površina projekcije objekta na sfero okoli p , deljena z r^2 . Oziroma, kar površina projekcije na enotsko sfero okoli točke p :

$$\Omega = \frac{a}{r^2} \tag{A.1}$$

Prostorski kot je brezdimenziionalen (tako kot v 2D), vendar običajno uporabljamo enoto steradian. 1 steradian je definiran kot prostorski kot, ki na enotski sferi pokriva površino 1. Ker je površina sfere enaka $4\pi r^2$, je torej maksimalni prostorski kot enak 4π . Hemisfera pokriva 2π steradianov. Vsakdanji primer: Luna in Sonce imata približno enak prostorski kot kadar ju opazujemo z Zemlje, čeprav sta bistveno različnih velikosti.

Dodatek B

Monte Carlo aproksimacija

Naj bo X zvezna slučajna spremenljivka. Funkcijo gostote verjetnosti (angl. *probability density function*) $p(x)$ povežemo z verjetnostjo

$$P[a \leq X \leq b] = \int_a^b p(x) dx \quad (\text{B.1})$$

$$p(x) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$$

Pričakovana vrednost slučajne spremenljivke X in $Y = g(X)$, pri čemer je X je porazdeljena s p ($X \sim p$), je

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx \quad (\text{B.2})$$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p(x) dx$$

Recimo, da želimo aproksimirati integral

$$\int_D f(x) dx \quad (\text{B.3})$$

in predpostavimo, da imamo primerno gostoto verjetnosti p nad domeno D .

Potem je integral ekvivalenten

$$\int_D f(x) dx = \int_D \frac{f(x)}{p(x)} p(x) dx = E \left[\frac{f}{p} \right] \quad (\text{B.4})$$

Monte Carlo aproksimacija integrala je torej ocena pričakovane vrednosti f/p glede na gostoto p . Če torej izberemo n slučajnih spremenljivk $X_i \sim p$, potem je Monte Carlo cenilka integrala enaka

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{f(X_i)}{p(X_i)} \tag{B.5}$$